THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Claude ROIESNEL

"SYMETRIE CHIRALE ET DESINTEGRATIONS DES MESONS η, η' EN TROIS PIONS. GRANDE UNIFICATION."

Soutenue le 18 Novembre 1982 devant la Commission d'Examen

MM. L. MICHEL — President
V. ALESSANDRINI
C. BOUCHIAT
D. FOURNIER
J. ILIOPOULOS
T.N. TRUONG

THESE

PRESENTEE

A L'UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Claude ROIESNEL

"SYMETRIE CHIRALE ET DESINTEGRATIONS DES MESONS η, η' EN TROIS PIONS. GRANDE UNIFICATION."

Soutenue le 18 Novembre 1982 devant la Commission d'Examen

MM. L. MICHEL — President
V. ALESSANDRINI
C. BOUCHIAT
D. FOURNIER
J. ILIOPOULOS
T.N. TRUONG

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I INTRODUCTION GENERALE

I.1) Modèle standard des interactions électromagnétiques, faibles et fortes.

I.2) Symétrie chirale et chromodynamique quantique.

I.3) Grande Unification

CHAPITRE II DESINTEGRATIONS $\eta, \eta' \to 3\pi$

II.1) Stratégie du calcul de $\Gamma(\eta, \eta' \to 3\pi)$
Normalisation des amplitudes $\mathcal{M}(\eta, \eta' \to 3\pi)$
Matrice de masse de l'octet de mésons pseudoscalaires
Corrections d'unitarité.

II.2) "Résolution of the $\eta \to 3\pi$ problem"
C. Roiesnel and T.N. Truong, Nucl. Phys. B187(1981), 293.

II.3) "$\eta, \eta' \to 3\pi$ decays"
C. Roiesnel and T.N. Truong, Preprint Ecole Polytechnique (1982).

CHAPITRE III TEMPS DE VIE DU PROTON ET VALEUR DE L'ANGLE FAIBLE θ_W DANS LES THEORIES UNIFIEES

III.1) Brisure de symétrie d'une théorie grand-unifiée
Mécanisme de Higgs
Renormalisation dans une théorie grand-unifiée
Temps de vie du proton et valeur de $\sin^2\theta_W(\mu)$ dans SU(5)

III.2) "Symmetry breaking effects in Grand Unified Theories"
I. Antoniadis, C. Kounnas and C. Roiesnel, Nucl. Phys. B198, (1982) 317

CHAPITRE IV LE PROBLEME DES FERMIONS

IV.1) Unification de la saveur
Combien de familles de fermions ?
Méthodes de construction de modèles grand-unifiés.

IV.2) "SU(8) Grand Unification"
C.W. Kim and C. Roiesnel, Phys. Lett. 93 B (1980) 343.

REFERENCES GENERALES

AVANT - PROPOS

Quoique cette thèse soit consacrée à deux sujets bien distincts, j'espère qu'une certaine unité se dégagera dans la méthode. Les phénomènes étudiés ont en commun d'avoir leur origine dans une symétrie brisée. Même si la brisure de symétrie est de nature très différente, la méthode consiste toujours à exploiter la symétrie sous-jacente pour expliquer les phénomènes.

Le physicien des particules doit souvent louvoyer entre deux écueils, d'une part une approche trop phénoménologique qui se fasse aux dépens de la rigueur, d'autre part une approche trop spéculative qui privilégie les idées par rapport aux faits. Je ne prétends certes pas avoir toujours su éviter ces écueils, de par la nature même des sujets abordés, mais du moins les ai-je eus constamment à l'esprit.

Cette thèse est le fruit de travaux faits en collaboration. Je tiens à remercier chaleureusement Tran N. Truong, non seulement parce qu'il est le co-auteur d'une partie des travaux de cette thèse, mais aussi pour tout le temps qu'il a consacré à m'initier à la physique des particules ainsi que pour ses encouragements constants tout au long de ces cinq années de recherche.

Avec Ignatios Antoniadis et Costas Kounnas j'ai eu de fructueuses discussions sur la renormalisation d'une théorie de jauge spontanément brisée. Je les remercie pour notre amicale collaboration qui a abouti à l'article reproduit dans cette thèse.

J'ai retiré beaucoup de profit d'une courte visite de Chung W. Kim à l'Ecole Polytechnique. Je le remercie pour m'avoir encouragé à persévérer

dans l'étude de la Grande Unification.

Messieurs C. Bouchiat et J. Iliopoulos ont été à l'origine de l'un des travaux de cette thèse. Je leur en suis reconnaissant et les remercie d'avoir bien voulu faire partie de mon Jury. Je veux aussi remercier Jean Iliopoulos d'avoir accepté la tâche de rapporteur de cette thèse.

Je tiens à remercier M. le Professeur L. Michel d'avoir bien voulu présider le Jury de cette thèse. Ma compréhension de la brisure de symétrie doit beaucoup à son oeuvre.

Je remercie MM. les Professeurs V. Alessandrini et D. Fournier d'avoir bien voulu faire partie du Jury.

Je suis reconnaissant à Jean Lascoux de m'avoir accueilli au Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique.

Je voudrais remercier tous les chercheurs du Centre pour leur amicale disponibilité et les discussions stimulantes que nous avons pu échanger.

Je tiens enfin à remercier tous les membres du Secrétariat pour leur aide à la préparation matérielle de ce travail et particulièrement D. Concha pour le tirage et Camille Amozig qui a accompli la tâche de dactylographier cette thèse avec beaucoup de patience et de gentillesse.

"God, Thou great symmetry,
Who put a biting lust in me
From whence my sorrows spring,
For all the frittered days
That I have spent in shapeless ways
Give me one perfect thing"

A. Wickham

CHAPITRE I

INTRODUCTION GENERALE

I.1) Modèle standard des interactions électromagnétiques, faibles et fortes

Les théories de jauge non abéliennes sont les théories les plus prometteuses pour décrire les interactions de particules élémentaires. Leur structure a été élaborée[1] par analogie avec l'électrodynamique quantique qui est une théorie de jauge basée sur le groupe U(1) décrivant les interactions électromagnétiques entre électrons et photons. L'introduction des groupes non abéliens repose sur les données expérimentales qui ont conduit à regrouper les particules élémentaires en multiplets dont les composantes se transforment entre elles sous l'action d'une interaction. Chaque composante ou particule est identifiée par un ensemble de nombres, appelés charges ou nombres quantiques, qui sont additifs et conservés au cours de l'interaction. La structure des multiplets caractérise le groupe de symétrie sous - jacent. Les générateurs du groupe définissent son action sur chaque multiplet. Les charges des particules ne sont autres que les valeurs propres associées au sous-ensemble des générateurs qui commutent entre eux, en conformité avec un principe général de la Mécanique Quantique. Les théories de jauge reposent sur le concept d'invariance locale. Ce principe d'invariance de jauge stipule que si G est un groupe de symétrie d'une interaction, alors leur description doit être invariante sous une transformation arbitraire du groupe G en chaque point de l'espace-temps. Cela se traduit par l'association à chaque générateur du groupe d'un champ physique, le boson vectoriel de jauge. On peut considérer que l'existence du multiplet des champs de jauge, qui se transforment comme la représentation adjointe du groupe, est impliquée par le principe d'invariance de jauge locale qui apparaît comme un principe dynamique. L'observation expérimentale des champs de jauge constitue le véritable test d'une théorie de jauge si elle entend décrire une interaction. Par contre il n'y a aucun argument théorique, pour l'instant, justifiant le choix des groupes de jauge et des multiplets de fermions. Leur introduction repose sur l'étude expérimentale.

C'est ainsi par exemple que les leptons, particules sensibles à

l'interaction faible mais non à l'interaction forte, se groupent en doublets. On en connait actuellement trois

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau^- \end{pmatrix}_L \qquad (I.1.1)$$

Les leptons sont caractérisés par deux nombres quantiques, l'isospin faible T_3 et la charge électrique Q. La théorie de jauge minimale qui puisse décrire les interactions faibles et électromagnétiques est le modèle de Weinberg et Salam[2] basé sur le groupe $SU(2) \times U(1)$. Le nombre quantique associé au groupe U(1), l'hypercharge Y, est défini conventiellement à partir de la charge électrique par la formule $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$. Le modèle de Weinberg et Salam contient quatre champs de jauge : trois champs $W^{\pm}$, W^3 associés aux générateurs du groupe SU(2) et un champ B^o associé au générateur de U(1). Si la symétrie $SU(2) \times U(1)$ n'était pas brisée ces quatre bosons seraient de masse nulle, alors que la nature n'en contient qu'un seul, le photon. De plus l'invariance SU(2) locale interdit l'existence d'une masse pour les leptons en raison de la nature chirale de l'interaction faible. En effet seule la partie gauche des leptons $\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi$ se transforme comme un doublet de SU(2), la partie droite $\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi$ est un singulet. Comme les parties droite et gauche des leptons ont des propriétés de transformation différentes, un terme de masse $m\bar{\psi}_L \psi_R$ briserait la symétrie SU(2). Il faut donc briser la symétrie SU(2) pour pouvoir expliquer l'origine des masses aussi bien des bosons de jauge que des fermions. Nous verrons au chapitre III qu'il est possible d'arriver à ce résultat tout en respectant le principe d'invariance de jauge locale grâce au phénomène de brisure spontanée de symétrie.[3] Pour l'instant il nous suffit de remarquer qu'une fois la symétrie SU(2) brisée, le photon γ peut a priori être une combinaison linéaire quelconque des champs neutres W_3 et B^o. L'angle de mélange θ_W est un paramètre arbitraire de la théorie. La combinaison orthogonale au photon est un champ neutre massif Z_o, médiateur d'interactions courant neutre de force approximativement égale à celle des courants chargés faibles. De plus, tous les processus de courant neutre doivent être fonction du seul paramètre θ_W. Il est remarquable que tous les résultats expérimentaux sur les courants neutres, depuis les mesures d'interférence γ-Z^o en physique atomique

et dans l'annihilation $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ jusqu'aux mesures de section efficace dans les réactions neutrinos à très haute énergie, soient en accord avec cette prédiction si $\sin^2\theta_W = 0.23 \pm 0.02$. La confirmation finale du modèle de Weinberg et Salam est liée à l'observation directe des bosons massifs $W^\pm$ et Z^o dont les masses sont prédites par les relations $M_W^2 = \pi\alpha/\sqrt{2}\, G_F \sin^2\theta_W$ et $M_Z^2 = M_W^2/\cos^2\theta_W$ où α est la constante de structure fine et G_F la constante de Fermi. On obtient ainsi $M_W \simeq 80$ GeV et $M_Z \simeq 90$ GeV. Les expériences de collision proton - antiproton actuellement en cours au CERN devraient permettre la production et l'observation des bosons Z^o dans un avenir très proche si le modèle de Weinberg et Salam est correct, ce qui est probable.

La description des interactions fortes est plus complexe. On sait que les hadrons, particules sensibles à ces interactions telles proton, neutron, etc..., ne sont pas des particules élémentaires. Les collisions lepton - nucléon révèlent l'existence de constituents ponctuels à l'intérieur des nucléons. L'introduction de ces constituents de spin 1/2, les quarks[4], permet de bien expliquer la classification et le spectre de masse des hadrons. Il faut pour cela en introduire actuellement cinq types différents. Le nombre quantique qui distingue les quarks, la saveur, est conservé par les interactions fortes mais violé par les interactions faibles. En fait les parties gauches des quarks, comme des leptons, se groupent en doublets vis à vis des interactions faibles :

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L \quad ; \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \qquad (I.1.2)$$

L'existence du sixième quark, le quark t, n'est pour l'instant inférée que pour des raisons esthétiques de symétrie entre leptons et quarks. Les parties droites des quarks, quant à elles, semblent être des singulets de SU(2). Notons pour terminer l'examen des propriétés des quarks par rapport à $SU(2) \times U(1)$, que leur charge électrique doit être fractionnaire, $Q = +2/3$ pour u,c,t et $Q = -1/3$ pour d,s,b. Pour que l'on puisse construire une théorie de jauge des interactions fortes à partir des quarks, il faut que ceux-ci aient une autre propriété que la saveur. Or l'introduction d'un degré de liberté supplémentaire, la couleur, est nécessaire pour résoudre une contradiction entre le principe d'exlusion de Pauli et l'existence de

hadrons constitués de trois quarks avec même nombre quantique de saveur et de spin : $\Delta^{++}(uuu)$, $\Delta^{-}(ddd)$, $\Omega^{-}(sss)$. Il faut que chaque saveur de quark existe au moins en trois variétés de couleur. On constate alors que seuls sont observés dans la nature les multiplets de hadrons qui sont une combinaison singulet de couleur de quarks et d'antiquarks : mésons $(q\bar{q})$ et baryons (qqq). La non observation directe des états multiquarks $(q\bar{q}q\bar{q})$, $(qqqq\bar{q})$... s'explique aisément par l'existence de voies de dissociation en mésons et baryons. Mais les états multiquarks peuvent être mis en évidence dans l'analyse des réactions hadroniques. Le triplement du nombre de quarks se retrouve aussi dans de nombreuses comparaisons entre théorie et expérience, et seule son introduction permet leur accord. Puisque chaque saveur de quark apparaît être en fait un triplet de couleur, on pense maintenant que l'interaction forte entre quarks peut être décrite par une théorie de jauge non brisée basée sur le goupe de couleur SU(3), appelée la chromodynamique quantique.[5] Les quarks interagissent par l'intermédiaire d'un octet de bosons de jauge colorés de masse nulle, appelés gluons car ils lient les quarks ensemble à l'intérieur des hadrons. Les gluons sont insensibles à la saveur mais par contre distinguent les trois couleurs des quarks. On a déjà remarqué que seuls les objets singulet de couleur peuvent être isolés. Le confinement de la couleur implique le confinement des quarks et des gluons. Cependant des indices expérimentaux indirects en faveur de l'existence des gluons se sont accumulés ces dernières années. D'abord les expériences de diffusion lepton-proton montrent que seulement la moitié de l'impulsion du proton est portée par les quarks. Quelque chose d'autre, électriquement neutre et insensible aux interactions faibles, doit porter le reste. Les gluons peuvent jouer ce rôle. Ensuite on observe dans l'annihilation electron-positron des événements avec une structure en trois gerbes qui sont interprétés comme la réaction $e^{+}e^{-} \rightarrow q\bar{q} + \text{gluon}$.

En résumé, tous les faits expérimentaux à l'heure actuelle nous conduisent à penser que nous comprenons les interactions électromagnétiques, faibles et fortes au moyen du modèle de Weinberg et Salam et de la chromodynamique quantique. Ils constituent ensemble le modèle standard qui est donc une théorie de jauge basée sur le groupe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, spontanément brisée en $SU(3) \times U(1)_{em}$. Il contient 12 bosons de jauge (8 gluons, W^{+},

W^-, Z^o, γ)), 3 familles de quarks et de leptons (u,d,ν_e,e^-; $c,s,\nu_\mu,\bar{\mu}$; t,b,ν_τ,τ). Tous les fermions gauches sont des doublets de SU(2) et tous les fermions droits sont des singulets de SU(2). Seule échappe à ce modèle la description de l'interaction gravitationnelle qui est complètement négligeable dans le domaine de la physique des particules.

I.2) Symétrie chirale et chromodynamique quantique

Quoique la chromodynamique quantique ait été proposée depuis longtemps comme théorie des interactions fortes et bien qu'il y ait d'innombrables résultats expérimentaux très détaillés sur les réactions hadroniques, nous ne savons pas encore quelle est la précision de cette théorie. Cette situation est toute différente de celle de l'électrodynamique quantique dont la prédiction du moment magnétique anormal "g-2" de l'électron est l'un des succés éclatants. La raison provient de la propriété des théories de jauge non abélienne d'être asymptotiquement libres.(6) Cela signifie que leur constante de couplage effective tend vers zéro à très courte distance et qu'au contraire elle diverge (aux premiers ordres en théories des perturbations) à grande distance. Cette propriété est remarquable et, comme nous le verrons dans la suite, ses conséquences sont importantes. D'abord le régime de couplage fort à grande distance doit être d'une importance clé pour le confinement des quarks et de la couleur même si le mécanisme exact reste inconnu. Ensuite il s'avère difficile de tirer des conséquences de la chromodynamique quantique, particulièrement à basse énergie où la théorie des perturbations est inapplicable.

Force donc est de recourir à des méthodes non perturbatives pour expliquer les propriétés des hadrons. L'une de ces méthodes consiste à utiliser les symétries approchées des interactions fortes.(7) Pour comprendre l'origine de ces symétries approchées dans le cadre de la chromodynamique quantique, il faut remarquer que l'interaction de couleur, comme l'interaction électromagnétique mais contrairement à l'interaction faible, est une interaction de type vectoriel. Cela signifie que les parties gauche et droite des quarks ont les mêmes propriétés de transformation vis à vis du groupe SU(3) de couleur et les différentes saveurs de quarks peuvent avoir des masses arbitraires. Si les N_f saveurs de quarks étaient de masse nulle,

les interactions fortes seraient invariantes globalement sous le groupe de symétrie chirale $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$ qui consiste en toutes les transformations unitaires, unimodulaires et indépendantes du point d'espace-temps, agissant indépendamment sur les parties droite et gauche des N_f saveurs de quarks. Les masses des quarks : m_u, m_d, m_s, ..., brisent explicitement la symétrie chirale. L 'échelle de la brisure d'isospin est mesurée par $m_u - m_d$, celle de la symétrie SU(3) de saveur par $m_s - (m_u + m_d)$ etc.. . Les masses des quarks u, d (m_u, $m_d \simeq 10$ MeV) sont très petites par rapport à l'échelle des intéractions de couleur (quelques centaines de MeV). La symétrie chirale $SU(2) \times SU(2)$ doit donc être une très bonne symétrie de la chromodynamique quantique. Par contre, comme $m_s \simeq 150$ MeV, on doit s'attendre à ce que la symétrie $SU(3) \times SU(3)$ soit moins bien réalisée. Les autres quarks c, b,... sont lourds et peuvent être ignorés dans l'étude des phénomènes de basse énergie.

Dans la limite chirale où $m_u = m_d = m_s = 0$ la théorie possède huit courants vectoriels et huit courants axiaux qui sont conservés. Ces courants s'expriment explicitement en fonction des champs de quarks

$$V_\mu^a(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q(x), \quad A_\mu^a(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q(x) \quad a = 1,\ldots,8 \tag{I.2.1}$$

Dans ces formules, les matrices de Gell-Mann, λ^a, agissent sur la saveur et la sommation sur les indices de couleur est implicite. On peut écrire des relations de commutation à temps égaux pour les courants aussi bien que pour les charges correspondantes, qui commutent avec l'hamiltonien de la chromodynamique quantique. Les relations de commutation entre les charges ne sont autres que celles de l'algèbre de Lie du groupe $SU(3) \times SU(3)$. Les relations de commutation entre les charges et les courants traduisent le fait que V_μ^a et A_μ^a appartiennent à la représentation $(1,8) + (8,1)$ de $SU(3) \times SU(3)$. On peut également déduire les relations de commutation des charges avec le terme de masse des quarks $\bar{q} M q$, où M est la matrice de masse des différentes saveurs de quarks, du fait qu'il se transforme comme la représentation $(\bar{3},3)$ de $SU(3) \times SU(3)$. On désigne généralement par algèbre des courants, l'ensemble de tous les commutateurs à temps égaux que l'on obtient à partir des relations de commutation avec les charges

auxquelles on substitue les composantes temporelles des courants

$$Q^a(t) = \int d^3x\, V_o^a(\vec{x},t) \; ; \quad Q_5^a(t) = \int d^3x\, A_o^a(\vec{x},t) \qquad (I.2.2)$$

Cette substitution se justifie en utilisant les règles de commutation canoniques pour les champs de quarks.

Il est très facile de voir qu'à la limite chirale, le vide ne peut être invariant sous $SU(3) \times SU(3)$ si la chromodynamique quantique avec des quarks de masse nulle est une bonne approximation.[8] En effet, les combinaisons $R = V + A$ et $L = V - A$ se transforment respectivement comme les représentations $(1,8)$ et $(8,1)$ de $SU(3) \times SU(3)$. Si le vide $|0>$ est invariant alors la fonction à deux points $<0|RL|0>$ doit s'annuler. Cela implique que chaque fois qu'il y a une particule de spin 0^+ ou 1^- qui contribue à $<0|VV|0>$, une particule de spin 0^- ou 1^+ de même masse doit contribuer à $<0|AA|0>$. Il n'y a aucune trace de tels doublons de parité dans le spectre des hadrons. L'état de plus basse énergie, le vide physique $|0>$, doit être asymétrique sous $SU(3) \times SU(3)$ ce qui suppose une brisure spontanée de la symétrie chirale. Une symétrie spontanément brisée implique l'existence de bosons de Goldstone.[9] Si un générateur T^a de $SU(3) \times SU(3)$ ne laisse pas le vide invariant, $T^a|0> \neq 0$, on doit avoir un état physique $T^a|0>$ qui a la même énergie que le vide car l'hamiltonien commute avec T^a. Si T^a est une charge vectorielle alors l'état $T^a|0>$ décrit un scalaire de masse nulle, si T^a est une charge axiale alors on obtient un pseudoscalaire de masse nulle. Les huit hadrons les plus légers (π, K, η) sont des pseudoscalaires. On les interprète comme les bosons de Goldstone associés aux charges axiales. La masse non nulle de l'octet de pseudoscalaires est attribuée à la brisure explicite de la symétrie chirale par les masses des quarks. Les charges vectorielles ne sont pas brisées spontanément. Il n'y a aucune trace de scalaires légers dans le spectre des hadrons. De plus, les hadrons se groupent en multiplets presque dégénérés qui constituent des représentations du groupe $SU(3)$ de saveur ce qui indique que $SU(3)_V$ est une symétrie normale du spectre.

Le mécanisme dynamique de la brisure spontanée de la symétrie chirale, comme celui du confinement, n'est toujours pas élucidé dans le

cadre de la chromodynamique quantique. De plus nous avons jusqu'ici passé sous silence le fait que l'hamiltonien de la chromodynamique quantique possède formellement une symétrie $U(3)_L \times U(3)_R$ à la limite chirale. En effet, on peut aussi écrire un courant vectoriel singulet de saveur $V^o_\mu(x) = \bar{q}(x)\ \gamma_\mu\ q(x)$ et un courant axial singulet de saveur $A^o_\mu(x) = \bar{q}\ \gamma_\mu\ \gamma_5\ q(x)$ (la sommation sur les indices de saveur est implicite) qui sont formellement conservés à la limite de quarks de masse nulle. Mais alors que le courant vectoriel singulet est normalement conservé, le courant axial singulet ne l'est pas à cause de l'anomalie[10]

$$\partial^\mu A^o_\mu(x) = \frac{3\alpha_s}{4\pi}\ \mathrm{Tr}\ F_{\mu\nu}(x)\ \tilde{F}^{\mu\nu}(x) \qquad (I.2.3)$$

si bien que la symétrie chirale effective est $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$. Mais puisque $F\tilde{F}$ est une divergence, il est possible de définir un courant axial singulet de saveur qui soit conservé mais non invariant de jauge. Les conséquences de cette loi de conservation constituent ce qu'on appelle le problème $U(1)_A$. En effet le méson pseudoscalaire singulet de saveur que l'on observe est le η' qui a une masse de près de 1 GeV et qui ne peut donc être identifié à un boson de Goldstone de masse nulle à la limite chirale. Il y a des arguments qui indiquent que le problème U(1) devrait trouver une solution dans le cadre de la chromodynamique quantique à cause de l'existence, dans les théories de jauge non abéliennes, de configurations de champs ayant une structure topologique non triviale, auxquelles peut être reliée l'anomalie axiale.[11] Mais là encore les arguments sont d'ordre heuristique et aucune preuve rigoureuse n'existe.

L'étude du nonet de mésons pseudoscalaires (π, K, η, η'), en particulier de la matrice de masse du système (π^o, η, η'), est donc indispensable si l'on veut comprendre le lien entre la brisure de la symétrie chirale et la chromodynamique quantique. Le deuxième chapitre de cette thèse est consacré à l'étude des désintégrations des mésons pseudoscalaires η et η' en trois pions au moyen de l'algèbre des courants. L'intérêt de ce formalisme est qu'il permet de relier les largeurs de désintégration au spectre de masse du système (π^o, η, η'). En effet les amplitudes $\eta \to 3\pi$ et $\eta' \to 3\pi$ sont normalisées par les éléments non diagonaux $<\pi^o\ |H|\ \eta>$, $<\pi^o\ |H|\ \eta'>$

de la matrice de masse. Cependant les points de normalisation sont situés en dehors de la région physique. Il faut donc faire une extrapolation jusque dans la région physique. Les travaux antérieurs négligeaient cette extrapolation et prédisaient une valeur pour la largeur de désintégration $\Gamma(\eta \to 3\pi)$ qui était inférieure d'un facteur trois à la valeur expérimentale. Les articles reproduits dans le deuxième chapitre montrent que l'extrapolation est en fait très sensible à l'interaction pion-pion dans l'état final qui produit un facteur d'amplification suffisant pour obtenir un bon accord avec l'expérience pour $\Gamma(\eta \to 3\pi)$. La valeur expérimentale de $\Gamma(\eta' \to 3\pi)$ n'est pas encore connue mais il faut noter que l'extrapolation est ici beaucoup plus incertaine. Néanmoins l'élément de matrice $< \pi^o \,|H|\, \eta' >$ dépend très fortement des hypothèses faites pour obtenir une description précise des masses de η, η' et de l'angle de mélange pseudoscalaire. A partir de la valeur expérimentale de $\Gamma(\eta' \to 3\pi)$ on pourra donc extraire $< \pi^o \,|H|\, \eta' >$ et tester les différentes méthodes d'approximation de la chromodynamique quantique se proposant de calculer le spectre des hadrons.

I.3) Grande Unification

Nous avons présenté brièvement au premier paragraphe le modèle standard qui décrit avec succés les interactions électromagnétiques et faibles à basse énergie ($E < 100$ GeV) et qui fournit une description simplifiée des interactions fortes à haute énergie à cause de la propriété de liberté asymptotique. Cette propriété, qui obscurcit la comparaison des prédictions de la chromodynamique quantique (Q.C.D.) avec les résultats expérimentaux à basse énergie, a au contraire une conséquence remarquable à très haute énergie. En effet, puisque la constante de couplage forte effective $\alpha_s(Q^2)$ décroît quand le transfert Q^2 croît alors que la constante de couplage électromagnétique $\alpha_{em}(Q^2)$ a un comportement inverse, ces deux constantes de couplage vont devenir égales à une certaine énergie. La variation en énergie s'obtient à partir des équations du groupe de renormalisation[6] :

$$\alpha_i(Q^2) = \frac{\alpha_i(\mu^2)}{1 + \frac{b_i}{6\pi}\ \alpha_i(\mu^2)\ \mathrm{Ln}\ \frac{Q^2}{\mu^2}} \qquad (I.3.1)$$

où l'indice $i = 1,2,3$ réfère respectivement aux groupes de jauge U(1), SU(2) et SU(3) du modèle standard. μ^2 est un point de renormalisation que l'on doit prendre plus grand que M_W^2 car les formules (I.3.1) supposent les groupes de jauge non brisés. Les constantes b_i dépendent du nombre et de la nature des particules élémentaires qui sont sensibles aux interactions du modèle standard. Avec les trois familles de leptons et de quarks actuellement connues, on obtient :

$$b_1 = -1 \; ; \qquad b_2 = 5 \; ; \qquad b_3 = \frac{21}{2} \tag{I.3.2}$$

Les forces des interactions électromagnétiques et fortes sont très différentes à l'échelle $\mu \sim 100\,\text{GeV}$ ($\alpha_{em}(100\,\text{GeV}) \sim 1/130$; $\alpha_s(100\,\text{GeV}) \sim 1/10$). Comme la variation des constantes de couplage est logarithmique, leur point de rencontre se situe donc à une énergie très élevée, de l'ordre de 10^{15} GeV. Il est tout de même notable que cette valeur reste très inférieure à la masse de Planck $1/\sqrt{G_\gamma} \sim 2 \times 10^{19}$ GeV où G_γ est la constante de gravitation de Newton. Cela va nous permettre d'ignorer les interactions gravitationnelles dans tout ce qui va suivre. La valeur de la constante de couplage α_2 associée au groupe SU(2) est fixée dans le modèle de Weinberg et Salam par celle de l'angle θ_W : $\alpha_{em}(\mu^2)/\alpha_2(\mu^2) = \sin^2\theta_W(\mu^2)$. Comme on sait que $\sin^2\theta_W(100\,\text{GeV}) \sim .20$, la constante α_2 est située entre α_s et α_{em}. Elle décroît quand l'énergie augmente puisque SU(2) est un groupe non abélien. On constate en fait que α_2 passe approximativement par le point de rencontre de α_s et α_{em} vers 10^{15} GeV.[12] Ce résultat étonnant est le fondement de la grande unification.[13] En effet l'interprétation la plus naturelle consiste à postuler l'existence d'un groupe simple G contenant le produit $SU(2) \times U(1) \times SU(3)$ afin qu'il n'y ait qu'une seule constante de couplage. Ce groupe G doit être spontanément brisé vers 10^{15} GeV afin d'expliquer que les forces associées aux interactions électromagnétiques, faibles et fortes soient si différentes à basse énergie. Cette brisure spontanée de symétrie implique l'existence de bosons de jauge massifs "superlourds" ($M_x \sim 10^{15}$ GeV), qui sont médiateurs de nouvelles interactions mélangeant les nombres quantiques de couleur et de saveur. Le scénario de la grande unification peut donc se résumer par le diagramme suivant :

$$G \xrightarrow[M_x(\sim 10^{15}\,\mathrm{GeV})]{} SU(2)\times U(1)\times SU(3) \xrightarrow[M_w(\sim 10^{2}\,\mathrm{GeV})]{} SU(3)\times U(1)_{em} \qquad (I.3.3)$$

Une conséquence très importante de la grande unification est que les quarks et leptons vont être regoupés à l'intérieur d'un même multiplet du groupe G. Des transitions quark-lepton deviennent alors possibles grâce à l'échange d'un boson superlourd. Ce n'est sans doute pas une coincidence si l'unification quark-lepton exige une échelle aussi grande que $10^{14} - 10^{15}$GeV afin d'assurer la stabilité du proton dont le temps de vie τ_p serait donné approximativement par

$$\tau_p \propto \frac{M_X^4}{m_{proton}^5} \gtrsim O(10^{30}\ \text{ans}) \qquad (I.3.4)$$

La désintégration du proton serait la conséquence la plus importante des théories "grand-unifiées". Dans un grand nombre de modèles on s'attend à un temps de vie du proton très proche de la limite inférieure expérimentale actuelle. Aussi un effort considérable a-t-il été consacré à estimer la masse M_X des bosons superlourds. Le calcul précis de M_X sera l'un des objets du troisième chapitre de cette thèse. La violation du nombre baryonique B peut également avoir des conséquences importantes en cosmologie. En effet la violation conjointe du nombre baryonique et de l'invariance CP, qui est en quelque sorte une symétrie particule-antiparticule, peut permettre d'expliquer la prédominance de la matière sur l'antimatière dans l'univers[14], même si celui-ci est, initialement, complètement symétrique. Cependant le calcul du rapport du nombre de baryons au nombre de photons dans les modèles unifiés est assez délicat, car il faut faire un certain nombre d'hypothèses sur l'évolution thermodynamique de l'univers depuis sa création (en fait 10^{-35} secondes après sa création!). Il est étonnant que les prédictions soient du même ordre de grandeur que la valeur observée $N_B/N_\gamma = 10^{-9\pm1}$.

Le premier succés de la grande unification est de prédire les rapports entre les charges électriques des quarks et celles des leptons. En effet dans une théorie grand-unifiée, le photon est un boson de jauge

associé à un générateur du groupe G, l'opérateur de charge électrique Q. La trace de cet opérateur, comme celle de tout générateur, doit être nulle dans chaque multiplet de particules. Si leptons et quarks appartiennent à un même multiplet, alors leurs charges électriques seront reliées de manière algébrique par la condition $\mathrm{Tr}\, Q = 0$. Comme les quarks apparaissent toujours sous trois couleurs distinctes, on s'attend à avoir des relations du type $Q(q)/Q(e^-) = \pm 1/3, \pm 2/3$. Ce résultat jusqu'ici n'a pu être obtenu dans un autre cadre que celui des théories unifiées. L'unification quark-lepton a une autre conséquence importante. On doit s'attendre à trouver des relations entre certains paramètres de masses du modèle standard. Aux énergies où le groupe G est une bonne symétrie, les masses de certains leptons et quarks peuvent en effet être reliés par d'éventuels coefficients de Clebsch-Gordon. L'utilisation des équations du groupe de renormalisation permet alors de faire des prédictions pour les valeurs de ces paramètres mesurés à basse énergie. On peut ainsi espérer diminuer le nombre de paramètres libres du modèle standard, qui est souvent désigné comme le scénario aux 17 paramètres, dont 9 proviennent des masses arbitraires des leptons et des quarks.

Après ce bref exposé des motivations pour étudier les théories grand-unifiées, il est peut-être utile de présenter les méthodes de construction de modèles à partir de l'exemple le plus simple qui est le modèle de Georgi et Glashow[15] basé sur le groupe SU(5). SU(5) est en effet le groupe le plus petit qui puisse contenir $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. C'est un groupe de rang 4, c'est à dire qu'il a 4 générateurs diagonaux qui peuvent être identifiés avec l'isospin faible T_3, la charge électrique Q ou l'hypercharge Y, et les 2 générateurs diagonaux du groupe de couleur SU(3). Les générateurs d'un groupe unitaire peuvent être représentés par des matrices hermitiques de trace nulle. Le modèle SU(5) a donc $5^2 - 1 = 24$ bosons de jauge dont 12 sont ceux du modèle standard. Les 12 nouveaux bosons de jauge forment des triplets de couleur et des doublets d'isospin faible : (X_i, Y_i) $i = 1,2,3$ et leurs antiparticules. La charge électrique de ces bosons s'obtient à partir de la condition $\mathrm{Tr}\, Q = 0$ dans la représentation adjointe et de la relation $Q(X) = Q(Y) + 1$. On trouve $Q(X) = +4/3$ et $Q(Y) = +1/3$. Ce sont les bosons X et Y qui vont être responsables des nouvelles interactions violant le nombre baryonique. Ils doivent donc être superlourds ($M_X \sim M_Y \sim 10^{15}$ GeV).

Il est commode de décrire les multiplets de SU(5) en écrivant leur décomposition par rapport au groupe $SU(3) \times SU(2)$. La représentation fondamentale de SU(5), de dimension 5, doit ainsi avoir nécessairement la décomposition suivante en termes de représentations irréductibles des sous-groupes SU(3), SU(2) :

$$\underline{5} = (\underline{3},\underline{1}) + (\underline{1},\underline{2}) \qquad \text{(I.3.5)}$$

où la notation est telle que chaque représentation irréductible $\underline{r}$ est identifiée par sa dimension. On peut alors écrire immédiatement la décomposition de la représentation adjointe de SU(5) à partir du produit tensoriel $\underline{5} \times \overline{\underline{5}} = \underline{1} + \underline{24}$:

$$\begin{aligned} \underline{24} &= (\underline{8},\underline{1}) + (\underline{3},\underline{2}) + (\overline{\underline{3}},\underline{2}) + (\underline{1},\underline{3}) + (\underline{1},\underline{1}) \\ W &= (G_{ij}) + (X_i,Y_i) + (Y_i^+,X_i^+) + (W^+,W^3,W^-) + (B^o) \end{aligned} \qquad \text{(I.3.6)}$$

où on a rappelé la notation conventionnelle des différents bosons de jauge. Ensuite nous devons répartir les fermions dans les multiplets de SU(5). Nous avons noté au premier paragraphe que les quarks et leptons actuellement connus se groupent en trois familles ayant des propriétés de transformation identiques par rapport au groupe $SU(3) \times SU(2)$. De plus on constate que la somme des charges électriques à l'intérieur d'une même génération est nulle. Cela suggère de grouper les fermions d'une même famille dans les représentations de SU(5). Il y a 15 états d'hélicité dans chaque génération. Les représentations irréductibles de SU(5) de dimension inférieure ou égale à 15 sont vite trouvées : $\underline{5}$, $(\underline{5} \times \underline{5})_A = \underline{10}$, $(\underline{5} \times \underline{5})_S = \underline{15}$ et les représentations conjuguées (les indices A et S signifient qu'il faut considérer les parties antisymétrique et symétrique respectivement du produit tensoriel $\underline{5} \times \underline{5}$ et la représentation conjuguées de $\underline{r}$ est notée $\overline{\underline{r}}$). Il est immédiat de constater, en écrivant les décompositions de toutes ces représentations par rapport à $SU(3) \times SU(2)$ que seule la représentation réductible $\overline{\underline{5}} + \underline{10}$ peut convenir pour classer les fermions gauches. Ensuite il suffit de tenir compte de la condition $\mathrm{Tr}\, Q = 0$ pour chaque composante irréductible pour trouver qu'il existe une manière unique d'y placer les

fermions :

$$\bar{5} = (\bar{3},1) + (1,2)$$
$$\chi = (d_i^c)_L + (\nu, e^-)_L \qquad \text{(I.3.7a)}$$

$$10 = (\bar{3},1) + (3,2) + (1,1)$$
$$\psi = (u_i^c)_L + (u_i, d_i)_L + (e^c)_L \qquad \text{(I.3.7b)}$$

où f^c représente le fermion conjugué de charge de f. Le modèle SU(5) permet donc de classer tous les fermions connus, ce qui n'était pas évident a priori. Mais il n'y a pas de manière naturelle d'y placer un neutrino droit ν_R. S'il s'avérait qu'un neutrino droit existe, il faudrait abandonner la version minimale du modèle SU(5). La généralisation la plus simple serait alors le modèle SO(10),[16] dans lequel chaque génération est placée dans une seule représentation irréductible, la représentation spinorielle de dimension 16, dont la décomposition par rapport à SU(5) est

$$16 = \bar{5} + 10 + 1 \qquad \text{(I.3.8)}$$

Ce modèle semble plus élégant dans la mesure où il fait intervenir une seule représentation irréductible pour classer une famille. En fait, le choix de la représentation $\bar{5} + 10$ dans SU(5) n'est peut-être pas aussi arbitraire qu'il n'y parait d'un point de vue théorique. Une théorie de jauge, pour être renormalisable, ne doit pas contenir d'anomalies d'Adler-Bell-Jackiw.[10] Or la combinaison $\bar{5} + 10$ n'a pas d'anomolies. L'absence d'anomalies est un critère très utile pour construire des théories grand-unifiées dont nous dirons quelques mots au quatrième chapitre.

Nous terminons cette introduction à la grande unification en rappelant comment la valeur de l'angle faible θ_w est fixée dans le modèle SU(5). Nous savons que le lagrangien d'interaction électromagnétique a la forme

$$L_{em} = e\, Q\, \bar{\psi} \gamma_\mu A^\mu \psi \qquad \text{(I.3.9)}$$

où e est la constante de couplage électromagnétique, Q la charge électrique du fermion ψ et A_μ le champ du photon. La partie d'interactions courant neutre du modèle SU(5) s'écrit de la même manière

$$\mathcal{L}_{NC} = g_o \left[T_3 \bar{\psi}_L W^3_\mu \gamma^\mu \psi_L + T_o \bar{\psi} B_\mu \gamma^\mu \psi \right] \qquad (I.3.10)$$

où g_o est la constante de couplage du groupe SU(5), W^3_μ et B_μ les bosons neutres associés respectivement aux sous-groupes SU(2) et U(1) de SU(5). Les générateurs correspondants T_3 et T_o sont normalisés par la condition $\mathrm{Tr}\ T_a T_b = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ exprimant le fait qu'ils appartiennent à la représentation adjointe du groupe SU(5). D'autre part l'angle faible θ_W est défini par le mélange

$$\begin{aligned} B_\mu &= \cos\theta_W A_\mu - \sin\theta_W Z_\mu \\ W^3_\mu &= \sin\theta_W A_\mu + \cos\theta_W Z_\mu \end{aligned} \qquad (I.3.11)$$

Il suffit alors de reporter (I.3.11) dans (I.3.10) et de comparer les couplages des parties droite et gauche du fermion au photon avec (I.3.9) :

$$\begin{aligned} e Q_R &= g_o \cos\theta_W T_{oR} \\ e Q_L &= g_o \cos\theta_W T_{oL} + g_o \sin\theta_W T_{3L} \end{aligned} \qquad (I.3.12)$$

Comme les générateurs Q, T_3 et T_o doivent être linéairement dependants

$$Q = T_3 + C\, T_o \qquad (I.3.13)$$

on déduit les relations :

$$e C = g_o \cos\theta_W \ , \ \sin\theta_W = e/g_o \qquad (I.3.14)$$

L'angle faible θ_W est donc fixé dans la limite où la symétrie SU(5) est vérifiée par la relation

$$\sin^2\theta_W = \frac{1}{1+C^2} = \frac{\mathrm{Tr}\ T_3^2}{\mathrm{Tr}\ Q^2} = \frac{3}{8} \qquad (I.3.15)$$

Ensuite la valeur de $\sin^2\theta_W$, comme nous l'avons vu au début de cette section, décroît autour de .20 à basse énergie ce qui est proche de la valeur expérimentale. Il y a très peu de tests significatifs et pratiques des théories grand-unifiées. Mais la prédiction de la valeur de $\sin^2\theta_W$ à basse énergie à partir de la valeur symétrique 3/8, qui est commune à tout modèle unifié réaliste, figure comme une notable exception.

Au troisième chapitre, nous étudierons la brisure de symétrie et ses conséquences pour la renormalisation de la constante de couplage d'une théorie grand-unifiée . Comme application M_X et θ_W seront calculés de manière précise dans le modèle SU(5) mais les résultats sont présentés de façon à pouvoir être étendus aisément à n'importe quel groupe de grande unification. Pour obtenir la précision voulue on a utilisé une formulation[17] qui permet de traverser exactement un seuil dans une théorie grand-unifiée brisée spontanément, contrairement aux travaux précédents qui font l'approximation de distinguer arbitrairement les régions au-dessus et au-dessous du seuil et qui doivent donc utiliser une procédure de raccordement entre les deux régions. L'application de nos résultats donne une valeur de $\sin^2\theta_W$ en très bon accord avec les résultats expérimentaux et une prédiction pour le temps de vie du proton qui n'est pas en contradiction avec la limite expérimentale actuelle. Certains événements potentiels ont été annoncés récemment par plusieurs expériences. Leur confirmation impliquerait un temps de vie $\tau_p \sim 7 \times 10^{30}$ ans en accord avec un modèle SU(5) de grande unification.

Le modèle minimal SU(5) n'explique pas pourquoi la même structure qu'on a appelé génération ou famille, se répète trois fois dans le spectre des fermions. Certaines contraintes cosmologiques indiquent qu'il devrait exister au maximum quatre générations. Une possibilité est qu'une symétrie continue soit à l'origine des régularités observées dans le spectre des fermions. Une symétrie continue globale spontanément brisée implique l'existence de bosons de Goldstone de masse nulle ce qui semble en contradiction avec l'expérience. Quoi qu'il en soit, il serait préférable que cette symétrie soit réalisée localement. Cela signifie que de nouvelles interactions de jauge existerait entre les différentes générations. Il est alors

naturel de chercher à unifier ces nouvelles interactions de saveur avec les interactions électromagnétiques, faibles et fortes. Le quatrième chapitre de la thèse expose quelques unes des techniques et contraintes utilisées dans la construction de modèles de grande unification. En particulier on trouve qu'une théorie grand-unifiée basée sur le groupe SU(8) est le modèle minimal qui traite les trois familles de manière symétrique. Cependant il y a tout de même une grande prolifération de fermions non observés et un conflit entre l'élégance mathématique et le principe d'économie. De plus il semble difficile d'obtenir des relations de masse réalistes entre les fermions de manière naturelle, ce qui limite le pouvoir prédictif de ce genre de modèles. Bref, le problème des fermions reste posé!

CHAPITRE II

DESINTEGRATIONS $\eta, \eta' \to 3\pi$

II.1) Stratégie du calcul de $\Gamma(\eta,\eta' \to 3\pi)$

Normalisation des amplitudes $\mathcal{M}(\eta,\eta' \to 3\pi)$

Les désintégrations de η,η' en trois pions, qui violent la G-parité, doivent se produire par l'intermédiaire de la partie H_1 de l'hamiltonien de la chromodynamique quantique, qui dépend de la saveur des quarks

$$H_{QCD} = H_o + H_1$$

$$H_1 = \int d^3x \{m_u \bar{u}u + m_d \bar{d}d + m_s \bar{s}s\} = \int d^3x \mathcal{H}_1(x) \qquad (II.1.1)$$

Ces modes de désintégration ne peuvent en effet se produire au deuxième ordre de l'interaction électromagnétique à cause du théorème de Sutherland.[18] Pour normaliser les amplitudes $< 3\pi \,|H_1|\, \eta,\eta' >$ on utilise l'algèbre des courants et les théorèmes de pions mous. Cela consiste, partant d'une amplitude $< \beta\pi^i(q) \,|\mathcal{O}(0)|\, \alpha >$ à utiliser la formule de réduction L.S.Z

$$< \beta\pi^i(q) \,|\mathcal{O}(0)|\, \alpha > = \lim_{q^2 \to m_\pi^2} (m_\pi^2 - q^2) \int d^4x\, e^{iqx} < \beta \,|T(\pi^i(x)\, \mathcal{O}(0))|\, \alpha > \qquad (II.1.2)$$

puis l'hypothèse de conservation partielle du courant axial (P.C.A.C.)

$$\partial^\mu A_\mu^i(x) = \frac{f_\pi}{\sqrt{2}} m_\pi^2 \, \pi^i(x) \qquad (II.1.3)$$

Une intégration par parties fait alors apparaître, à cause du T-produit, le commutateur à temps égaux $[A_o^i(x), \mathcal{O}(0)]\, \delta(x_o)$. Si l'on ne tient plus compte de la limite $q^2 \to m_\pi^2$, l'équation (II.1.2) permet de définir l'amplitude hors de la couche de masse du pion. Passant alors à la limite $q \to 0$, on fait apparaître la charge axiale $Q_5^i = \int d^3x\, A_o^i(x)$, et, s'il n'y a pas de singularité à $q = 0$, on obtient le théorème de basse énergie

$$\lim_{q\to 0} f_\pi < \beta\pi^i(q) \mid \mathcal{O}(0) \mid \alpha > = -\sqrt{2} < \beta \mid [Q_5^i, \mathcal{O}(0)] \mid \alpha > \qquad \text{(II.1.4)}$$

L'application de cette méthode par exemple à l'amplitude $< \pi^+ \pi^- \pi^o \mid \mathcal{H}_1(0) \mid \eta >$ donne, par "contraction" du pion π^o, et en utilisant les règles d'anticommutation canoniques des champs de quarks :

$$\lim_{q_3\to 0} < \pi^+(q_1)\, \pi^-(q_2)\, \pi^o(q_3) \mid \mathcal{H}_1(0) \mid \eta > = -\frac{\sqrt{2}}{f_\pi} < \pi^+(q_1)\, \pi^-(q_2) \mid v(0) \mid \eta > \qquad \text{(II.1.5)}$$

où v est un opérateur pseudoscalaire, singulet de saveur :

$$v = [Q_5^3, \mathcal{H}_1] = (m_u - m_d)(\bar{u}\gamma_5 u + \bar{d}\gamma_5 d) \qquad \text{(II.1.6)}$$

L'amplitude $< 2\pi \mid v \mid \eta >$ ne correspond pas à un processus physique. Il faut donc contracter un autre pion pour se ramener à une quantité mesurable expérimentalement

$$\lim_{q_1\to 0} < \pi^+(q_1)\, \pi^-(q) \mid v(0) \mid \eta > = -\frac{\sqrt{2}}{f_\pi} < \pi^o(q) \mid u_3(0) \mid \eta > \qquad \text{(II.1.7)}$$

avec

$$u_3 = (m_u - m_d)(\bar{u}u - \bar{d}d) \qquad \text{(II.1.8)}$$

En fait un traitement correct doit symétriser les trois pions. Après de longues manipulations algébriques, du même type que celles rappelées ci-dessus, mais sans prendre la limite $q_i \to 0$ (il suffit de faire $q_i^2 = 0$ et de négliger les termes cubiques $q_i q_j q_k$), on obtient l'équation (4) ou (3.5) des section (II.2) et (II.3) respectivement. Elle exprime les amplitudes $\mathcal{M}(\eta, \eta' \to 3\pi)$ comme une somme de termes qui peuvent être normalisés par l'élément de matrice $< \pi^o \mid u_3 \mid \eta, \eta' >$. Chacun des termes a une interprétation physique distincte et correspond soit à un terme de contact, soit à une émission d'une paire de pions dans l'onde S, soit encore à une émission d'une paire de pions dans l'onde P dans le cas du mode chargé

$(\pi^+\pi^-\pi^o)$. Le facteur commun de normalisation $<\pi^o\,|u_3|\,\eta,\eta'>$ n'est autre que l'élément de matrice de masse $<\pi^o\,|\mathcal{H}_1|\,\eta,\eta'>$ puisque seule la partie isovectorielle u_3 de $\mathcal{H}_1$ peut contribuer. Nous allons voir dans le paragraphe suivant comment on peut relier cet élément de matrice au spectre de masse des mésons pseudoscalaires.

Matrice de masse de l'octet de mésons pseudoscalaires

La matrice de masse de l'octet de mésons pseudoscalaires peut être déterminée en utilisant les techniques de l'algèbre des courants. L'incorporation du η' fait l'objet de l'article reproduit dans la section (II.3). Si nous ignorons les effets de l'interaction électromagnétique, la masse des bosons de Goldstone pseudoscalaires π_a (a = 1,...,8) sera donnée au premier ordre en $\mathcal{H}_1$ par

$$\mu_1^2(\pi_a) = -\frac{1}{f_\pi^2}\int d^4x\, d^4y\, <0\,|[A_a^o(x),[A_a^o(y),\mathcal{H}_1(0)]]|\,0> \qquad \text{(II.1.9)}$$

Cette formule peut s'obtenir à partir de l'élément de matrice $<\pi^a(q)\,|\mathcal{H}_1(0)|\,\pi^a(q)|>$ par contraction des deux champs $\pi^a(x)$. Elle suppose la validité de l'hypothèse P.C.A.C. pour l'octet de pseudoscalaires car le développement perturbatif se fait par rapport à la limite chirale $SU(3)\times SU(3)$. Cependant il n'est pas nécessaire de prendre la limite $q\to 0$, il suffit de faire $q^2 = 0$ pour appliquer la formule (II.1.9). Pour s'en convaincre, considérons l'identité de Ward suivante :

$$\begin{aligned} -q_\mu q_\nu \int d^4x\, e^{iqx} <0\,|T\{A_a^\mu(x)\,A_a^\nu(0)\}|\,0> &\equiv q^2\,D_5(q^2) \\ = \int d^4x\, e^{iqx} <0\,|T\{\partial_\mu A_a^\mu(x)\,\partial_\nu A_a^\nu(0)\}|\,0> & \\ + \int d^4x\, e^{iqx}\,\delta(x_o) <0\,|[A_a^o(x),\partial_\nu A_a^\nu(0)]|\,0> & \\ - iq_\nu \int d^4x\, e^{iqx}\,\delta(x_o) <0\,|[A_a^o(x),A_a^\nu(0)]|\,0> & \end{aligned} \qquad \text{(II.1.10)}$$

Utilisant l'hypothèse P.C.AC. le premier terme du membre de droite n'est autre que le propagateur $f_\pi^2 \cdot M_a^4\,\Delta_{aa}(q^2)$ du champ $\pi_a(x)$. Utilisant les règles de commutation de l'algèbre des courants, le troisième terme ne contribue pas. Enfin utilisant l'identité $\partial_\mu A_a^\mu(0) = \int d^4y\,\delta(y_o)\,[A_a^o(y),\mathcal{H}_1(0)]$,

on voit qu'à la limite $q^2 = 0$ l'équation (II.1.10) est équivalente à l'équation (II.1.9) si on identifie $\mu_1^2(\pi_a) = \Delta_{aa}^{-1}(0)$. On obtient alors

$$\Delta^{-1}_{\pi^+\pi^+}(0) = \Delta^{-1}_{\pi^o\pi^o}(0) = \frac{1}{f_\pi^2}(m_u + m_d)\sigma$$

$$\Delta^{-1}_{K^+K^+}(0) = \frac{1}{f_\pi^2}(m_u + m_s)\sigma$$

$$\Delta^{-1}_{K^oK^o}(0) = \frac{1}{f_\pi^2}(m_s + m_d)\sigma \qquad \text{(II.1.11)}$$

$$\Delta^{-1}_{\eta\eta}(0) = \frac{1}{f_\pi^2}(m_u + m_d + 4m_s)\frac{\sigma}{3}$$

$$\Delta^{-1}_{\pi^o\eta}(0) = \frac{1}{f_\pi^2}(m_u - m_d)\frac{\sigma}{\sqrt{3}}$$

avec $\sigma = <0\,|\bar{u}u|\,0> = <0\,|\bar{d}d|\,0> = <0\,|\bar{s}s|\,0>$

Les valeurs moyennes dans le vide des champs de quarks sont égales si l'on suppose que la symétrie $SU(3)_v$ n'est pas spontanément brisée. Aux valeurs (II.1.11) on doit ajouter la contribution des photons virtuels $\mu_\gamma^2(\pi_a)$ qui sont sujettes aux relations (théorème de Dashen[19]) :

$$\mu_\gamma^2(\pi^o) = \mu_\gamma^2(K^o) = 0 \qquad ; \qquad \mu_\gamma^2(K^+) = \mu_\gamma^2(\pi^+) \qquad \text{(II.1.12)}$$

Le théorème de Dashen n'est strictement valide qu'à la limite chirale. Pour l'obtenir, il faut utiliser l'algèbre des courants et la symétrie $SU(3)_v$. Nous ne voyons aucune raison impliquant que la brisure de symétrie soit particulièrement grande dans les self-énergies électromagnétiques. Aussi utiliserons nous dans la suite les relations (II.1.12). L'élément de matrice $<\pi^o\,|u_3|\,\eta>$ qui nous intéresse s'écrit alors :

$$<\pi^o(q^2=0)\,|\mathcal{H}_1|\,\eta(q^2=0)> = \Delta^{-1}_{\pi^o\eta}(0) = M^2_{K^+} - M^2_{K^o} + M^2_{\pi^o} - M^2_{\pi^+} \qquad \text{(II.1.13)}$$

Les masses qui apparaissent dans l'équation (II.1.13) sont les masses

physiques alors que dans (II.1.11) les propagateurs sont évalués à $q^2 = 0$. Nous ferons la supposition que les corrections de self-énergie sont négligeables.

Corrections d'unitarité

Si on manipule les amplitudes $\mathcal{M}(\eta,\eta' \to 3\pi)$ au moyen des techniques de l'algèbre des courants, en symétrisant par rapport aux trois pions (Eq. (3.3), sect. (II.3)), on obtient une expression (Eq.(3.5), sect. II.3)) qui est valide seulement dans la limite des pions contractés de masse nulle et en négligeant les termes cubiques d'ordre $q_{1\alpha}q_{2\beta}q_{3\gamma}$. Cependant dans cette expression, il n'est pas nécessaire de prendre les pions mous, c'est à dire de négliger les termes d'ordre $q_{i\alpha}$. Nous ferons l'hypothèse que cette expression peut être utilisée avec les pions contractés sur leur couche de masse. Nous supposerons de plus que chacun des termes de l'expression peut être défini dans toute la région physique des désintégrations de η,η', ce qui revient à inclure certaines corrections d'ordre supérieur en q. Les amplitudes $\mathcal{M}(\eta,\eta' \to 3\pi)$ peuvent être normalisées par les éléments de matrice $<\pi^o |\mathcal{H}| \eta,\eta'>$ qui s'expriment en fonction des masses des mésons pseudoscalaires. Cependant nous avons vu que les points de normalisation sont situés en dehors de la région physique ($p^2_{\pi^o} = p^2_{\eta} = p^2_{\eta'} = 0$). Il s'agit donc d'évaluer la correction due à l'extrapolation hors de la région physique des désintégrations. Dans tout ce qui suit nous négligeons la correction due à l'extrapolation sur la masse du pion puisque la symétrie chirale $SU(2) \times SU(2)$ est une très bonne symétrie. Pour estimer les autres corrections, nous allons envisager séparément chacun des termes contribuant à l'amplitude $\mathcal{M}(\eta \to 3\pi)$. L'étude de l'amplitude $\mathcal{M}(\eta' \to 3\pi)$ peut se faire de façon analogue.

Considérons d'abord les termes de double commutateur

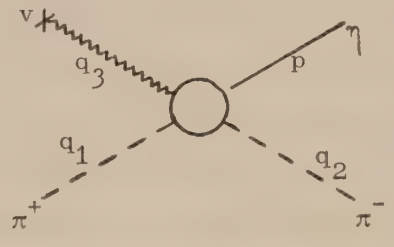
$$<\pi^o |u_3| \eta> = \frac{1}{\sqrt{2}} <\pi^{\pm} |u_{\pm}| \eta> \qquad \text{(II.1.14)}$$

Dand la région physique l'opérateur u porte l'impulsion $k = p_\eta - p_\pi$ des deux pions contractés. Nous ferons l'hypothèse que ces éléments de matrice

dépendent peu de k^2 et p_η^2 et nous utiliserons la formule (II.1.13). Cette hypothèse est d'ailleurs consistente avec le traitement de la matrice de masse des pseudoscalaires du paragraphe précédent. Cette supposition permet aussi de relier $<\pi^o |u_3| \eta>$ à $<0 |v| \eta>$, le terme de triple commutateur en contractant le pion π^o.

L'influence de l'extrapolation est par contre très importante pour le terme de simple commutateur $<\pi^+(q_1)\,\pi^-(q_2)\ |v|\ \eta(p)>$. L'opérateur v porte l'impulsion q_3 du pion neutre contracté. L'amplitude $<\pi^+\pi^-\ |v|\ \eta>$ est donc en fait une fonction à quatre points :

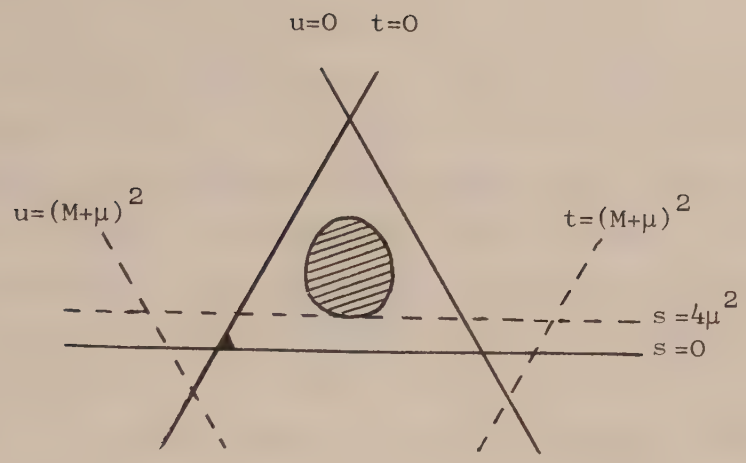
$G(s,t,u) \equiv$



où $p = q_1 + q_2 + q_3$, $s = (q_1 + q_2)^2$, $t = (p - q_1)^2$, $u = (p - q_2)^2$, $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = \mu^2$, $p^2 = M^2 = m_\eta^2$. On peut normaliser cette amplitude en contractant par exemple le pion $\pi^-(q_2)$:

$$\lim_{q_2 \to 0} G(s,t,u) = G(\mu^2,\mu^2,M^2) = -\frac{1}{f_\pi} <\pi^+(q_1)\ |u_-|\ \eta(p)> \qquad \text{(II.1.15)}$$

La valeur de l'amplitude au point de normalisation s'obtient à partir de la formule (II.1.13) si on fait les approximations déjà décrites précédemment. Ce point de normalisation est situé dans un sommet du triangle de Mandelstam. Pour faire l'extrapolation dans la région physique de $\eta \to 3\pi$, située entièrement à l'intérieur du triangle de Mandelstam, on doit traverser le seuil $s = 4\mu^2$, de la voie directe $\pi - \pi$, $I = 0$, dans l'onde S. Par contre, on reste en dessous du seuil, t et $u = (M + \mu)^2$, de la voie croisée $\eta - \pi$, $I = 1$, dans l'onde S :



Or la traversée d'un seuil produit un facteur d'amplification à cause de la singularité de seuil $\sqrt{s-(m_1+m_2)^2}$. Il est donc raisonable d'évaluer la correction d'unitarité due à l'extrapolation hors de la région physique en faisant une projection sur la voie directe π-π et en négligeant l'interaction dans la voie croisée η-π. Pour tester cette hypothèse, on peut estimer grossièrement la correction d'unitarité élastique dans la voie $\eta-\pi$ en supposant que ce canal est dominé par la résonance δ ($I=1$, $J^{PC}=0^{++}$) dont la masse est $m_\delta = 980$ MeV. En prenant soin de symétriser par rapport aux variables t et u, on obtient :

$$D^{-1}_{\pi\eta}(t,u) = \left[\frac{1}{m_\delta^2-\mu^2}+\frac{1}{m_\delta^2-M^2}\right]^{-1}\left(\frac{1}{m_\delta^2-t}+\frac{1}{m_\delta^2-u}\right) \qquad \text{(II.1.16)}$$

Au point symétrique de la région physique de $\eta\to 3\pi$, $t=u=s_o\simeq 6\,\mu^2$, on a $D^{-1}_{\pi\eta}(s_o,s_o)\simeq 0.90$. Cette estimation est confirmée par un calcul plus complet de Raby[20] dans le formalisme des lagrangiens effectifs. Ce facteur de suppression doit être comparé au facteur d'amplification du à l'interaction pion-pion $I=0$ dans l'onde S, $D^{-1}_{\pi\pi}(s_o)\simeq 1.42$, qui est beaucoup plus important.

En résumé on construit l'amplitude de désintégration $\eta\to 3\pi$ dans la région physique, à partir du point de normalisation de l'algèbre des courants, en prenant en compte uniquement l'interaction pion-pion dans l'état final (onde S et onde P si les termes de Bremstrahlung sont présents). On peut estimer l'incertitude de cette méthode à 20% sur $\Gamma(\eta\to 3\pi)$ dont la valeur calculée est en bon accord avec la valeur expérimentale. Il faut rappeler qu'il s'agissait d'obtenir un facteur trois d'amplification pour

la largeur $\Gamma(\eta \to 3\pi)$. La prise en compte de l'interaction pion-pion se fait en imposant la relation d'unitarité élastique à deux corps de manière exacte. Ensuite l'équation d'unitarité à trois corps est satisfaite de manière approximative à la Khuri-Treiman en ajoutant un terme de correction. Nous renvoyons le lecteur aux deux articles reproduits ci-après pour les détails. Il faut remarquer qu'il n'y a pas de paramètres libres dans ce calcul. L'interaction pion-pion est obtenue directement à partir des résultats expérimentaux. Le même effet d'amplification est présent dans l'analyse de la désintégration $K\ell_4$,[21] ce qui permet aussi d'obtenir un bon accord avec les résultats expérimentaux.

L'application de la même stratégie aux désintégrations $\eta' \to 3\pi$ conduit à certaines difficultés. D'une part l'extrapolation dans la région physique, à partir du point de normalisation de l'algèbre des courants, est ici beaucoup plus incertaine. La correction d'unitarité due à l'interaction pion-pion I = 0 dans l'onde S devient sensible à l'effet de la résonance $\varepsilon'(1.3\ \text{GeV})$. On ne peut plus négliger également l'effet de la résonance $\delta(.98\ \text{GeV})$ dans la voie croisée $\eta - \pi$, I = 1, onde S. De plus, le processus de désintégration forte $\eta' \to \eta\pi\pi$ contribue à l'amplitude $\mathcal{M}(\eta' \to 3\pi)$ par l'intermédiaire du mélange $\eta - \pi^o$. Tous ces effets additionnés font que la largeur de désintégration $\Gamma(\eta' \to 3\pi)$ ne peut être déterminée précisément. Il existe cependant un moyen de minimiser les incertitudes en considérant le mode $\eta' \to \rho\pi$. Ce mode n'est pas contaminé par le processus $\eta' \to \eta\pi\pi$. L'amplitude $\mathcal{M}(\eta' \to \rho\pi)$ est décrite par les termes de Bremstrahlung dans la formule (3.5) de la section (II.3). Ces termes peuvent être normalisés par l'élément de matrice $<\pi^o |\mathcal{H}| \eta'>$ en utilisant les techniques habituelles de l'algèbre des courants. Ensuite la correction d'unitarité due à l'interaction pion-pion dans l'onde P s'obtient avec une très bonne approximation en supposant la dominance du ρ. L'expression de l'amplitude $\mathcal{M}(\eta' \to \rho\pi)$ est donnée dans la section (II.3). La largeur $\Gamma(\eta' \to 3\pi)$ n'est pas encore connue expérimentalement. Si on pouvait mesurer le mode $\eta' \to \rho\pi$, il serait facile d'extraire la valeur de $<\pi^o |\mathcal{H}| \eta'>$:

$$\Gamma(\eta' \to \rho\pi) = [\sqrt{2} \times \cos\theta + \sin\theta]^2 \times (0.93)\ \text{keV} \qquad \text{(II.1.17)}$$

en posant

$$<\pi^o |\mathcal{H}| \eta' > = [\sqrt{2} x \cos\theta + \sin\theta] [M^2_{K^+} - M^2_{K^o} + M^2_{\pi^o} - M^2_{\pi^+}] \qquad (II.1.18)$$

où $\theta \approx -10^o$ est l'angle de mélange pseudoscalaire et x est un paramètre qui dépend du modèle utilisé pour décrire le spectre de masse du système (π^o, η, η').

On est confronté à plusieurs problèmes dans un calcul théorique de l'élément de matrice de masse $<\pi^o |\mathcal{H}| \eta' >$. D'abord il faut utiliser l'hypothèse P.C.A.C. pour le champ du η' ce qui peut sembler injustifié. Mais il faut rappeler le succés des analyses des désintégrations de η et η' en deux photons. Ces analyses utilisent l'hypothèse P.C.A.C. pour η et η' modifiée pour tenir compte de l'anomalie électromagnétique :

$$\Gamma(\eta \to 2\gamma) \approx \frac{1}{3}\left(\frac{m_\eta}{m_\pi}\right)^3 [\cos\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta]^2 \Gamma(\pi^o \to 2\gamma) = 380\ \text{eV} \qquad (II.1.19\,a)$$

$$\Gamma(\eta' \to 2\gamma) \approx \frac{1}{3}\left(\frac{m_{\eta'}}{m_\pi}\right)^3 [2\sqrt{2}\cos\theta + \sin\theta]^2 \Gamma(\pi^o \to 2\gamma) = 6.3\ \text{keV} \qquad (II.1.19\,b)$$

Les valeurs expérimentales sont $\Gamma_{exp}(\eta \to 2\gamma) = 325 \pm 50$ eV et $\Gamma_{exp}(\eta' \to 2\gamma) = 5.3 \pm 2$ keV. Ensuite un traitement correct du méson η' doit résoudre le problème U(1) que nous avons présenté dans l'introduction. Dans la section (II.3) on a basé le traitement de la matrice de masse du système (π^o, η, η') sur des arguments en faveur de la conjecture que le problème U(1) peut être résolu dans le cadre du développement $1/N^c$ [22]. On obtient ainsi $x = 0.5$ alors que dans un modèle de quarks on a $x = 1$, ce qui entraîne un changement d'un facteur 6 pour la largeur $\Gamma(\eta' \to \rho\pi)$. Puisque l'élément de matrice $<\pi^o |\mathcal{H}| \eta' >$ et la largeur $\Gamma(\eta' \to \rho\pi)$ dépendent si fortement de la valeur du paramètre x, il est difficile de faire une prédiction. Il est préférable de prendre un point de vue inverse et d'attendre les résultats expérimentaux pour tester les différents modèles phénoménologiques décrivant le système (π^o, η, η').

Nuclear Physics B187 (1981), 293-300.

"RESOLUTION OF THE $\eta \to 3\pi$ PROBLEM"

C. Roiesnel and T.N. Truong

Nuclear Physics B187 (1981) 293–300
© North-Holland Publishing Company

RESOLUTION OF THE $\eta \to 3\pi$ PROBLEM

C. ROIESNEL and Tran. N. TRUONG

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique,
Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau, Cedex, France

Received 3 November 1980
(Final version received 9 April 1981)

It is shown that the discrepancy between experiment and the soft pion current algebra for $\eta \to 3\pi$ is mainly due to the square root threshold singularity induced by the strong pion–pion final-state interaction. It is found that $\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0) = 200$ eV, in excellent agreement with the experimental result 204 ± 29 eV.

1. Introduction

If the three-pion decay mode of η proceeds through the 2nd order of the electromagnetic interaction:

$$H_{\text{em}} = -e^2 \int \mathrm{d}^4x D^{\mu\nu}(x) T(J_\mu(x) J_\nu(0)) , \tag{1}$$

where $D^{\mu\nu}$ is the free photon propagator and J_μ is the electromagnetic hadronic current, Sutherland [1], using the soft pion technique, established that the matrix element for $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0$ vanishes when the four-momentum of the neutral pion vanishes. This result is in complete disagreement with experimental facts.

The remedy [2]* for this situation can be made by adding a u_3 tadpole term to H_{em} to account for the electromagnetic mass difference. This is so because the axial charge has a different commutation relation with the tadpole term. The existence of this term was argued by Wilson [3] as a counterterm to cancel out the infinities associated with H_{em} discussed above. It can also be regarded as a phenomenological strong isospin breaking mechanism which, in the language of quark model, is associated with the difference of up and down quark masses. Whatever the origin of the u_3 tadpole, assuming the usual commutation relation of u_3 and the axial charge together with the standard soft pion technique, the $\eta \to 3\pi$ decay width can be expressed in terms of K^+, K^0 and π^+, π^0 mass differences. It is found [4, 5] $\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0) = 54$ eV which is considerably smaller than the experimental value 204 ± 29 eV. The spectrum, i.e. the slope of the "odd" pion is, however, in good agreement with the experimental result.

* See also references in [4, 5].

The purpose of this note is to point out that, similarly to the calculation of $K\ell_4$ decay which was previously discussed [6], the strong pion–pion final-state interaction cannot be neglected. In fact, just the same as in $K\ell_4$ decay, the strong square root threshold singularity $\sqrt{s-4\mu^2}$, where s is the dipion invariant mass squared, provides the necessary enhancement factor which brings the theoretical result $\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0) = 200\,\text{eV}$ which is in excellent agreement with the experimental results. There is no free parameters in this calculation. The pion–pion $I = 0$, S-wave interaction is taken directly from the known experimental results and is the same one which provides the correct current algebra calculation of $K\ell_4$ [6].

Unlike the $K\ell_4$ decay where there are only two strongly interacting pions in the final state, in the $\eta \to 3\pi$ decay we have to deal with three strongly interacting particles in the final state which makes the calculation more complicated. As in the study of $K\ell_4$ decay, our strategy is to construct an $\eta \to 3\pi$ amplitude which satisfies analyticity and unitarity and, at the same time, the soft pion theorems. We have achieved an adequate approximation to the $\eta \to 3\pi$ problem by the use of the final-state theorem for the equal time commutator (ETC) which involves two-body interaction together with the introduction of a correction term approximately satisfying the three-body scattering unitarity and analyticity à la Khuri and Treiman [7]. Although the previous dispersion relation approach to the $K \to 3\pi$ problem [8] can be adapted to our problem with some modification, the method presented below is more precise (see the appendix). It enables us to treat the question of final-state interaction and "intrinsic" structure of the matrix element on the same footing which must be done in order to get the correct result for the rate and spectrum for $\eta \to 3\pi$.

2. $\eta \to 3\pi$ current algebra calculation

Our technique can be summarized as follows. Define

$$T^{ijk}_{\alpha\beta\gamma} = \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{d}^4y\, \mathrm{d}^4z\, \mathrm{e}^{iq_ix+iq_jy+iq_kz}\langle 0|\mathrm{T}\{A^i_\alpha(x), A^j_\beta(y), A^k_\gamma(z), u_3(0)\}|\eta\rangle\,, \quad (2)$$

where $A^i_\alpha(x)$ is an axial current with quantum number i whose divergence is associated with the pion field carrying momentum q_i. Let us also define the corresponding expression $\tilde{T}^{ijk}_{\alpha\beta\gamma}$ with the pion poles subtracted out [9]. This procedure enables us to calculate the ETC terms and the bremsstrahlung terms with the pions on the mass shell. Then, following the standard current algebra manipulations [10] with the current commutation relations

$$\begin{aligned} \delta(x_0-y_0)[A^0_i(x), u_j(y)] &= i\delta^4(x-y)d_{ijk}v_k(y)\,, \\ \delta(x_0-y_0)[A^0_i(x), v_j(y)] &= -i\delta^4(x-y)d_{ijk}u_k(y)\,, \end{aligned} \quad (3)$$

we get after lengthy algebraic manipulations, symmetrizing with respect to the three

pions and neglecting as usual the sigma terms,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(s,t,u) &= \langle \pi^+(q_1)\pi^-(q_2)\pi^0(q_3)|u_3(0)|\eta\rangle \\
&= q_{1\alpha}q_{2\beta}q_{3\gamma}\frac{\sqrt{2}}{f_\pi^3}\tilde{T}^{\alpha\beta\gamma}_{+-0} - \frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{f_\pi^3}\langle 0|v|\eta\rangle \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{2f_\pi^2}(\langle \pi^-|u_+(0)|\eta\rangle + \langle \pi^+|u_-(0)|\eta\rangle) \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{f_\pi}\langle \pi^+\pi^-|v|\eta\rangle \qquad (4) \\
&\quad - \frac{\sqrt{2}}{2f_\pi^2} i\{(q_3-q_1)^\gamma \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{i(q_1+q_3)x}\langle \pi^-(q_2)|\mathrm{T}\{V_\gamma^+(x), u_3(0)\}|\eta\rangle \\
&\quad - (q_3-q_2)^\gamma \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{i(q_2+q_3)x}\langle \pi^+(q_1)|\mathrm{T}\{V_\gamma^-(x), u_3(0)\}|\eta\rangle\} \\
&\quad + \frac{2\sqrt{2}}{3f_\pi^3}(2q_3-q_1-q_2)_\gamma \int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{i(q_1+q_2+q_3)x}\langle 0|\mathrm{T}\{A_3^\gamma(x), u_3(0)\}|\eta\rangle\,,
\end{aligned}$$

where $v = (\sqrt{3})^{-1}(\sqrt{2}v_0 + v_8)$ and $f_\pi = 135$ MeV. The 2nd term on the r.h.s. is the Fourier transform of the triple ETC, the 3rd and 4th that of double ETC and the 5th term is that of the single ETC. The 6th and 7th terms on r.h.s. of eq. (4) are the only bremsstrahlung terms which survive. The last term is closely related to the bremsstrahlung terms.

Let us now make the assumption that the "mass" matrix $\langle \pi_0|u_3(0)|\eta\rangle$ is a slowly varying function of momenta and is taken as a constant in our case. This type of assumption is usually made to relate the isospin violation mass splitting within an SU(3) multiplet. Within the validity of this assumption, the matrix element $\langle 0|v|\eta\rangle$ can then be related to $\langle \pi_0|u_3(0)|\eta\rangle$ by the soft pion theorem

$$\frac{\sqrt{2}}{f_\pi}\langle 0|v|\eta\rangle = \langle \pi^0|u_3(0)|\eta\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\langle \pi^\pm|u_\mp(0)|\eta\rangle\,. \qquad (5)$$

Next let us impose analyticity and unitarity on the single commutator term. This can be carried out straightforwardly because we work only to first order of the isospin symmetry breaking interaction u_3 and the matrix element $\langle \pi(q_1)\pi(q_2)|\nu(0)|\eta\rangle$ must have the phase of the S-wave, $I = 0$, pion–pion interaction. Let us denote

$$g(s) = \langle \pi^+(q_1)\pi^-(q_2)|v(0)|\eta\rangle\,, \qquad (6)$$

where the normalisation factor is omitted and $s = (q_1+q_2)^2$. From the usual techniques of dispersion relation, it is easy to show that, with the two pions on the mass shell, $g(s)$ is an analytic function in s plane with a cut from $4\mu^2$ to ∞.

Analyticity and elastic unitarity enables us to write

$$g(s) = g(\mu^2) D^{-1}(s, \mu^2)\,, \tag{7}$$

with

$$D^{-1}(s, \mu^2) = \exp \frac{s-\mu^2}{\pi} \int \frac{\delta_0(s')\,\mathrm{d}s'}{(s'-\mu^2)(s'-s-i\varepsilon)}\,, \tag{8}$$

where δ_0 is the S wave $I=0$ $\pi\pi$ phase shift. From the experimental knowledge of δ_0, we can approximate, as in Kℓ_4 decay [6],

$$D^{-1}(s, \mu^2) = \left(\frac{(s_1-\mu^2) + \sqrt{3}\mu a (s_1 - 4\mu^2)}{s_1 - s - ia(s_1-4\mu^2)\sqrt{s-4\mu^2}} \right)^{1/2}, \tag{9}$$

where a is the S-wave $I=0$ $\pi\pi$ scattering length, $a \simeq 0.25\mu^{-1}$ and $s_1 = 14\mu^2$. The phase shift δ_0 calculated from eq. (9) agrees with the experimental values from threshold to 900 MeV.

It remains to calculate $g(\mu^2)$. To do this we make the smoothness assumption, i.e. there is no error involved if one of the pion instead of being on-mass-shell has a zero mass. (This assumption is experimentally verified in Kℓ_3 decay [6].) In this case the soft pion theorem enables us to write

$$g(\mu^2) = -\frac{1}{f_\pi} \langle \pi^+ | u_-(0) | \eta \rangle\,. \tag{10}$$

The resolution of the $\eta \to 3\pi$ problem depends crucially on eqs. (6)–(10). In standard current algebra soft pion treatment $g(s) \simeq g(\mu^2)$, whereas in this calculation, for s in the physical region of $\eta \to 3\pi$, it is about 40% larger than its value at $s = \mu^2$.

The bremsstrahlung terms [6th and 7th terms on the r.h.s. of eq. (4)] are symmetric with respect to the interchange of the pions 1 and 2. The 6th term is antisymmetric with respect to the interchange of the pions 1 and 3 and similarly the 7th term antisymmetric with respect to the interchange of the pions 2 and 3. They represent the emission of a pair of P-wave pions. Using standard technique for demonstration of the low energy theorem, they can be shown to be proportional to the matrix element $\langle \pi^0 | u_3(0) | \eta \rangle$.

Similarly the last term on the r.h.s. of eq. (4) represents the sum of two terms which have the same symmetry properties as the bremsstrahlung terms. Furthermore, using standard techniques,

$$\int \mathrm{d}^4x\, \mathrm{e}^{i(q_1+q_2+q_3)x} \langle 0 | \mathrm{T}(A_3^\gamma(x) u_3(0)) | \eta \rangle = \frac{-\langle 0 | v | \eta \rangle}{m_\eta^2 - \mu^2} (q_1+q_2+q_3)^\gamma\,, \tag{11}$$

and combining with eq. (5), neglecting a term of order μ^2/m_η^2, they are the same as the bremsstrahlung terms, apart from a numerical coefficient. We assume ρ dominance for these terms in the physical region.

Putting everything together and leaving out the $\tilde{T}^{\alpha\beta\gamma}$ term for the time being, eq. (4) becomes

$$\mathcal{M}^0(s,t,u) = -\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}\left[D^{-1}(s,\mu^2) - \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{m_\rho^2-\mu^2}{m_\eta^2-\mu^2}\left(\frac{t-s}{m_\rho^2-u}+\frac{u-s}{m_\rho^2-t}\right)\right], \quad (12)$$

where the superscript 0 in $\mathcal{M}$ indicates that $\tilde{T}^{\alpha\beta\gamma}$ is neglected, $s=(q_1+q_2)^2$, $t=(q_1+q_3)^2$, $u=(q_2+q_3)^2$. We have invoked Dashen's theorem [11] to equate

$$\langle \pi_0 | u_3(0) | \eta \rangle = \frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}, \quad (13)$$

where $\delta m^2 = m^2(\mathrm{K}^+) - m^2(\mathrm{K}^0) - m^2(\pi^+) + m^2(\pi^0)$.

It is useful to examine the limiting cases of eq. (12).

(i) If the S-wave and P-wave pion–pion interactions are switched off $\delta_0 = 0$ and $M_\rho = \infty$, we recover the usual result

$$\mathcal{M}^0(s) = -\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3}+\frac{s-s_0}{m_\eta^2-\mu^2}\right), \quad (14)$$

where $s_0 = \frac{1}{3}m_\eta^2 + \mu^2$.

(ii) In the limit $q_1 \to 0$ or $q_2 \to 0$ we have $\mathcal{M}^0(s,t,u) = 0$ which is nothing but the soft pion theorem. The limit $q_1 \to 0$, $q_2 \to 0$ simultaneously should not be taken because energy-momentum conservation requires that the hamiltonian should carry an extra momentum. The demonstration of the low energy theorem for the bremsstrahlung term has to be modified and a counterterm can be added such that the correct limit is obtained.

In the physical region, the modulus of the matrix element, eq. (12), can be approximated as

$$|\mathcal{M}^0(s,t,u)| \simeq (2.22)\left(\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{0.84(s-s_0)}{m_\eta^2-\mu^2}\right), \quad (15)$$

which yields $\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0) = 266$ eV compared with the experimental value 204 ± 29 eV. The calculated slope as given by eq. (14) is 16% smaller than the experimental value 1.00 ± 0.01.

At the level of approximation of eq. (12) the unitarity condition for three-body scattering à la Khuri–Treiman is satisfied within an accuracy of 25%. In order to improve agreement with the unitarity relation we can try a correction term which satisfies the following conditions:

(a) It satisfies the current algebra constraints, i.e., it vanishes at $s = \mu^2$ and $s = m_\eta^2$.

(b) The amplitude is real when $s < 4\mu^2$ and has a discontinuity across the s cut.

Such a function is $\lambda(D^{-1}(s,\mu^2)-1)(m_\eta^2-s)/(m_\eta^2-s_0)$, where λ is determined by the condition that unitarity be exact at the symmetry point $u=t=s=s_0$. For this purpose let us neglect the $I=2$ S-wave $\pi\pi$ interaction which is experimentally

small. The absorptive part of $\mathcal{M}(s, t, u)$, by unitarity, is given in this case by

$$\text{Abs}\,\mathcal{M}(s, t, u) = [\mathcal{M}(s) + \tfrac{1}{3}\bar{\mathcal{M}}(s)] f_0^*(s)\,, \tag{16}$$

where

$$\mathcal{M}(s) = -\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}[D^{-1}(s, \mu^2) - \lambda(D^{-1}(s, \mu^2) - 1)(m_\eta^2 - s/m_\eta^2 - s_0) - \tfrac{2}{3} + (m_\rho^2 - \mu^2/m_\rho^2 - s_0)(s - s_0/m_\eta^2 - \mu^2)]\,, \tag{17}$$

$$\bar{\mathcal{M}}(s) = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}\Omega[\mathcal{M}(t) + \mathcal{M}(u)]\,, \qquad f_0(s) = \mathrm{e}^{i\delta_0(s)}\sin\delta_0(s)\,,$$

$$t - u = \rho(s)\cos\theta\,, \qquad \rho(s) = \tfrac{1}{2}[(s - 4\mu^2)(s - (m_\eta - \mu)^2)(s - (m_\eta + \mu)^2)/s]^{1/2}\,.$$

From eq. (17) we have

$$\begin{aligned}\text{Abs}\,\mathcal{M}(s) &= \left(-\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}\right)[1 - \lambda(m_\eta^2 - s/m_\eta^2 - s_0)]\,\text{Im}\,D^{-1}(s) \\ &= \left(-\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}\right)[1 - \lambda(m_\eta^2 - s/m_\eta^2 - s_0)]D^{-1}(s) f_0^*(s)\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Equating eqs. (16) and (18) at $s = t = u = s_0$ gives $\lambda = 0.25$. It turns out with this value of λ, the unitarity condition eq. (16) holds also to a good accuracy throughout the physical region of $\eta \to 3\pi$.

In the physical region, for $4\mu^2 \leqslant s \leqslant 8\mu^2$, the modulus of the amplitude $|\mathcal{M}(s)|$ given by eq. (17), for $\lambda = 0.25$, can be linearly parametrized to a very good approximation by

$$|\mathcal{M}(s)| = +\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}(1.95)\left(\tfrac{1}{3} + 0.96\,\frac{s - s_0}{m_\eta^2 - \mu^2}\right), \tag{19}$$

which yields $\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0) = 205$ eV which is in excellent agreement with the experimental values. The calculated slope is only 4% lower than its measured value. Because eq. (19) differs little from eq. (15), we can have confidence in our calculation scheme.

To see the role of the low-energy pion–pion interaction and in particular the square root threshold singularity, let us approximate the function D^{-1}, instead of eq. (9), by the $\varepsilon(1.3\ \text{GeV})$ pole:

$$D^{-1}(s) = \frac{m_\varepsilon^2 - \mu^2}{m_\varepsilon^2 - s}\,, \tag{20}$$

where we neglect the imaginary part of the propagator as is usually done in the effective lagrangian approach. The decay rate is now

$$\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0) \simeq 70\ \text{eV}\,,$$

which is much smaller than that obtained with the correct expression for D^{-1}, eq. (9).

In order to see the sensitivity of our calculation on the high-energy behaviour of the phase shift δ (the pion–pion S-wave phase shift as given by eq. (9) agrees only with the experimental phase up to 900 MeV), let us multiply the r.h.s. of eq. (9) by the ε propagator, eq. (20). The resulting expression, which could be thought of as the ε dominance with an $\varepsilon\pi\pi$ vertex correction as given by eq. (9), has the correct low-energy pion–pion phase shift and yields

$$\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0) = 240 \text{ eV},$$

which differs from the original value by 20%. We can regard this number as the theoretical uncertainty of our calculation.

We can similarly calculate $\Gamma(\eta \to 3\pi^0)$. The matrix element for this mode is given by a similar expression to eq. (17) except that the bremsstrahlung term does not contribute. The ratio $\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0)/\Gamma(\eta \to 3\pi^0)$ is found to be 0.60 which differs from the experimental value of 0.80 ± 0.05. It can be shown that the purely electromagnetic term can change this ratio at the expense of reducing the "odd" pion slope which is not acceptable*.

3. Conclusion

We have calculated the "tadpole" contribution to the $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0$ matrix element and found that the low-energy S-wave, $I = 0$, pion–pion interaction via the square root threshold singularity provides the necessary enhancement factor to get agreement with experimental results. This same mechanism affects the $K\ell_4$ calculation [6] but does not change the usual $K \to 3\pi$ calculation because current algebra relates the matrix element of $K \to 3\pi$ to that of $K \to 2\pi$ which are both measured above the branch point $s = 4\mu^2$. The usual linear approximation for the matrix element of $K \to 3\pi$ is also verified by the more complicated form eq. (17).

It is a pleasure to thank T.N. Pham, D. G. Sutherland and M. Testa for useful discussions.

Appendix

For completeness we give here the solution of Neveu and Scherk (NS) for the $\eta \to 3\pi$ problem which is an adaptation of their solution for the $K \to 3\pi$ problem. Using eqs. (5)–(7) in this paper together with eq. (III-16) given in ref. [8], we have

$$\mathcal{M}_{NS}(s) = -\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}\frac{D(\mu^2)}{D(m_\eta^2)}\left\{\frac{s-\mu^2}{m_\eta^2-\mu^2}\frac{D(m_\eta^2)}{D(s)} + \frac{m_\eta^2 - s}{3m_\eta^2}\left(\frac{D(\mu^2)}{D(s)} - 1\right)\right\}, \quad \text{(A.1)}$$

* We have recently been informed by Dr. Y.D. Prokoshkin that a recent experiment performed at Serpukhov (IHEP preprint 81-12) puts an upper limit on the branching ratio $BR(\eta \to \pi^0\gamma\gamma) < 3 \times 10^{-3}$ which leads to $\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0)/\Gamma(\eta \to 3\pi^0) = 0.68 \pm 0.06$, in agreement with our calculation. We would like to thank Dr. Prokoshkin for this communication.

where the function D^{-1} is given by eq. (9) in the text. Unlike the 0th order solution discussed in text, eq. (12), the presence of the function $D(m_\eta^2)$ in eq. (A.1) introduces a phase of $-50°$ which is not negligible. To check the accuracy of eq. (A.1), we use the same steps in deriving eqs. (16) and (17):

$$\mathcal{M}_{\rm NS}(s_+) - \mathcal{M}_{\rm NS}(s-) = 2i\, e^{-i\delta} \sin\delta \left(\mathcal{M}_{\rm NS}(s_+) + A\, \frac{m_\eta^2 - s}{3m_\eta^2} \right), \tag{A.2}$$

where

$$A = -\frac{2}{f_\pi^2}\, \frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}\, \frac{D(\mu^2)}{D(m_\eta^2)}.$$

The r.h.s. of eq. (A.2) is to be compared with that given by Khuri and Treiman:

$$A\, \frac{(m_\eta^2 - s)}{3m_\eta^2} = \tfrac{1}{3}\overline{\mathcal{M}_{\rm NS}},$$

and yields at $s = s_0$

$$0.2A = (0.24 - i0.10)A. \tag{A.3}$$

The real part in eq. (A.3) is satisfied to an accuracy of 15% which is better than eq. (12), but there is a large violation of the unitarity relations in the imaginary part which is negligible in eq. (12). [It is recalled that the unitarity relation is exactly satisfied by eq. (17) at $s = s_0$.]

Eq. (A.1) yields a $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0$ width of 150 eV. The calculated spectrum shows, however, a substantial deviation from a linear function of s. For $4\mu^2 \leq s \leq s_0$, $|\mathcal{M}| \sim 1 + 2.38(s - s_0)/m_\mu^2 - \mu^2$; for $s_0 \leq s \leq 8.6\mu^2$, $|\mathcal{M}| \sim 1 + 2.89(s - s_0)/m_\eta^2 - \mu^2$. This feature is not consistent with experimental results which show $|\mathcal{M}|$ is a linear function of s.

References

[1] D.G. Sutherland, Phys. Lett. 23 (1966) 384
[2] S.K. Bose and A.H. Zimmerman, Nuovo Cim. 43A (1966) 1165;
P. Dittner, P.H. Bondi and S. Eliezer, Phys. Rev. D8 (1973) 2253;
P. Langacker and H. Pagels, Phys. Rev. D10 (1974) 2904
[3] K. Wilson, Phys. Rev. 179 (1969) 1499
[4] S. Weinberg, Phys. Rev. D11 (1975) 3583
[5] S. Raby, Phys. Rev. D13 (1976) 2594
[6] T.N. Truong, Phys. Lett. 99B (1981) 154
[7] N.N. Khuri and S.B. Treiman, Phys. Rev. 119 (1960) 1115
[8] A. Neveu and J. Scherk, Ann. of Phys. 57 (1970) 39
[9] H.D.I. Abarbanel, Phys. Rev. 153 (1967) 1547
[10] S.L. Adler and R.F. Dashen, Current algebras (Benjamin, New York, 1968)
[11] R.F. Dashen, Phys. Rev. 183 (1969) 1245

Preprint Ecole Polytechnique (1982)

"η, $\eta' \to 3\pi$ DECAYS"

C. Roiesnel and T.N. Truong

$\eta, \eta' \to 3\pi$ decays

C. ROIESNEL

and

Tran N. TRUONG*

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique
Plateau de Palaiseau - 91128 Palaiseau Cedex - France -

Abstract : The amplitudes for $\eta, \eta' \to 3\pi$ are calculated with the square root threshold singularity induced by the strong pion-pion final state interaction properly taken into account. It is shown that the $\eta' \to 3\pi$ decay rate depends sensitively upon an improved treatment of the pseudoscalar nonet mass matrix.

*Also Institute for Theoretical Physics, Santa Barbara, and Theory Division. CERN.

A515.0982 Septembre 1982

1. INTRODUCTION

A long standing problem for current algebra and approximate chiral symmetry has been the calculation of the three pions decay mode of η. If the decay proceeds through the electromagnetic interaction, the matrix element for $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^o$ vanishes when the four momentum of the neutral pion vanishes [1]. This result is in complete disagreement with experimental facts.

The standard remedy [2] for this situation is to allow for a "tadpole" isospin breaking mechanism which, in the language of quark model, is associated with the difference of up and down quark masses. A deeper understanding of the connection between tadpole and short distance behaviour was provided by Wilson. Then using the techniques of Current algebra the $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^o$ decay rate can be expressed in terms of K^+, K^o and π^+, π^o mass differences [3,4,5] which results in a value three times smaller than the experimental one (204 ± 29 eV). It is possible to think of several solutions to this problem :

(i) Measurement of $\eta \to 2\gamma$ via the Primakoff process could be wrong [4]

(ii) The ratio m_u/m_d obtained by Current Algebra using the Dashen's theorem [6] , which is valid in the chiral limit, may have a large correction. The $\eta \to 3\pi$ decay rate could then be used to determine the ratio m_u/m_d ignoring Dashen's theorem.

(iii) The strong pion-pion final state interaction cannot be neglected. This holds not only for $\eta \to 3\pi$ decays but also for $K\ell_4$ [7] .

Solution (i) is unlikely because the electromagnetic axial anomaly together

with the η-η' mixing (see below) yields just the measured decay rate. Furthermore the experimental ratio $R = \Gamma(\eta \to 3\pi)/\Gamma(\eta \to 2\gamma)$ is independent of the experimental knowledge of $\Gamma(\eta \to 2\gamma)$ and cannot be explained by the standard analysis using the Dashen's theorem.

There is nothing really wrong with alternative (ii) except that it cannot provide a mechanism to understand the $K\ell_4$ decay where the parameters in the chiral limit are fixed by known experimental quantities.

In a previous paper [8] , hereafter referred to as (I), we adopted the view-point that Dashen's theorem can be used in the broken chiral limit but the $\eta \to 3\pi$ amplitude must be corrected for the final state interaction. As an independent check for this hypothesis, the ratio R can be calculated in our analysis and is found to be in good agreement with experiment. In fact, just the same as in $K\ell_4$ decay [7] , the strong square root threshold singularity $\sqrt{s-4\mu}^2$, where s is the dipion invariant mass squared, provides the necessary enhancement factor which brings the theoretical result in excellent agreement with experiment. There was no free parameter in this calculation. The pion-pion I = 0,S wave interaction is taken directly from the known experimental results and is the same one which provides the correct current algebra calculation of $K\ell_4$.

It is rather natural to try and apply the methods of (I) in analyzing the three pions decay mode of η'. Admittedly there will be a rather large extrapolation off the η' mass shell since these methods involve the procedure of taking two pions soft. However the strategy of (I) which consists in constructing an $\eta' \to 3\pi$ amplitude which satisfies analyticity and unitarity and at the same time the soft pions theorems should provide an adequate mean of connecting the amplitude in the physical region to the

current algebra prediction on the pion mass shell . In $\eta, \eta' \to 3\pi$ decays we have to deal with three strongly interacting particles in the final state. In the $\eta \to 3\pi$ problem our 0th order amplitude satisfied approximately the three body scattering unitarity and analyticity à la Khuri and Treiman [9] , to about 25%. The amplitude for $\eta' \to 3\pi$ will satisfy this condition to only about 50%. The reasons are twofold, first the physical region is much larger in the η' decay and the pion-pion I=0,S-wave interaction is stronger, second for the $\pi^+\pi^-\pi^o$ mode, the pion-pion I=1, P wave interaction is no longer negligible since the ρ pole is near the physical region. As in (I), we will introduce a term to correct for this discrepancy but we expect that the resulting approximation will not be as good as for $\eta \to 3\pi$. The ρ interference also affects the spectrum which is no longer linear in the energy of the neutral pion as is the case in the $\eta \to 3\pi$ decay. The striking interference pattern in the spectrum of $\eta' \to 3\pi$ thus provides a clear test of our approach with respect to a naïve Current Algebra treatment.

The study of the $\eta' \to 3\pi$ decay brings us to another long standing problem which is the connection of the η' with the U(1) problem. The amplitude for $\eta' \to 3\pi$ is normalized, by the usual techniques of Current Algebra, to the "mass" matrix element $<\pi_o|H|\eta'>$. An evaluation of the absolute decay rate of $\eta' \to 3\pi$ therefore calls for a proper treatment of the mass matrix of the nonet of pseudoscalar mesons. In particular we must have a theoretical framework which provides correct values for the η, η' masses and mixing angles, otherwise any prediction for $<\pi_o|H|\eta'>$ could not be trusted. In (I) we neglected the $\eta - \eta'$ mixing when evaluating the matrix element $<\pi_o|H|\eta>$. But this approximation was justified because of the success of the Gell-Mann-Oakes-Renner formula for m_η^2 [10] . We will check that the inclusion of the $\eta - \eta'$ mixing changes only slightly the theoretical value of the $\eta \to 3\pi$ decay rate but it affects substantially the $\eta' \to 3\pi$

decay rate. We will base our treatment of the pseudoscalar nonet mass matrix on arguments by Witten [11] and Veneziano [12] supporting the conjecture that the U(1) problem can be solved within the 1/N expansion

The outline of our paper is as follows. In section 2, we discuss the theoretical framework needed to get a phenomenologically acceptable mass matrix for the pseudoscalar nonet. Section 3 is devoted to the Current Algebra derivation of the $\eta, \eta' \to 3\pi$ decay amplitudes with the proper inclusion of the pion-pion final state interaction. Predicted curves for the spectra are given. We summarize our results and discuss the predicted decay rates in the conclusion.

2. PSEUDOSCALAR NONET MASS MATRIX

In this section, we consider some aspects of the spectrum and the mixing pattern of the pseudoscalar nonet. In order to get good agreement with experimental data, we will follow the treatment of Di Vecchia et al.[13] which have improved the mixing analysis by introducing non leading terms in an effective Lagrangian combining the chiral and large N limits of Q.C.D.. The quadratic part of their Lagrangian is in the leading order of the 1/N expansion

$$L_2 = \frac{1}{2} Tr\left(\partial_\mu \Phi \partial_\mu \Phi\right) - \frac{1}{2} Tr\left(M \Phi^2\right) - \frac{a}{2N} \left(Tr \Phi\right)^2 \qquad (2.1)$$

where the matrix Φ containing the fields of the pseudoscalar nonet can be written as

$$\Phi = \pi^a \frac{\lambda^a}{2} \qquad a = 0, 1, \ldots 8 \qquad (2.2)$$

where the λ's are the Gell-Mann matrices ($\lambda^o = (\frac{2}{3})^{1/2} I$) and M is the mass matrix due to the explicit breaking of chiral invariance by the quark masses

$$M_{ij} = - \frac{(m_i + m_j)}{f_i f_j} \langle \bar{q}_i q_j \rangle \qquad (2.3)$$

In our calculations we will take $f_i = f_\pi$ for i=1,...8 in order to be consistent with the assumption that the vacuum is SU(3) symmetric , i.e., $\langle \bar{q}_i q_j \rangle = \sigma \delta_{ij}$. However we will allow f_o to differ from f_π because $f_o = f_\pi$

only in the $N \to \infty$ limit.

The parameter a which appears in the Lagrangian (2.1) is given by

$$\int d^4x \; T\langle q(x) q(0)\rangle_{YM} = \frac{1}{2} \frac{a}{N} f_o^2 \tag{2.4}$$

where the Green function on the left-hand side is computed in pure Yang-Mills theory in the limit $N \to \infty$ and $q(x)$ is the topological charge density. Next to leading order corrections of order m_q/N have been taken into account in Ref. [13] by adding in the lagrangian a quadratic term of the form

$$-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{N} (\mathrm{Tr}\,\Phi)(\mathrm{Tr}\,M\Phi) \tag{2.5}$$

where ε is a free parameter of order 1. The presence of such a term can be supported by anomalous Ward identity arguments [14] . Then the mass matrix of the (π^o, η, η') system in the presence of the extra term (2.5) is given in the (π^3, η^3, η^o) basis by :

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \Pi^2 & \frac{\delta m^2}{\sqrt{3}} & x_o \sqrt{\frac{2}{3}} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \delta m^2 \\ \text{sym.} & \frac{1}{3}[4K^2 + \Pi^2] & x_o \frac{\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)[\Pi^2 - 2K^2] \\ \text{sym.} & \text{sym.} & \frac{2}{3} x_o^2 (1+\varepsilon)[\Pi^2 + K^2] + a \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

with the following notations

$$\Pi^2 = (m_u + m_d) \frac{\sigma}{f_\pi^2} \approx M_{\pi^o}^2 \tag{2.7 a}$$

$$K^2 = m_s \frac{\sigma}{f_\pi^2} = \frac{1}{2}\left(M_{K^o}^2 + M_{K^+}^2 - M_{\pi^+}^2\right) \tag{2.7 b}$$

$$\delta m^2 = (m_u - m_d)\frac{\sigma}{f_\eta^2} = M^2_{K^+} - M^2_{K^0} + M^2_{\pi^0} - M^2_{\pi^+} \qquad (2.7\ c)$$

$$x_o = f_\pi / f_o \qquad (2.7\ d)$$

We have invoked Dashen's theorem [6] to take into account the electromagnetic contribution to the mass matrix. Diagonalization of the matrix $\mathcal{M}$ fix the parameters a and $x_o(1+\frac{\varepsilon}{2})$ from the knowledge of m^2_η and $m^2_{\eta'}$,

$$a = .90\ \text{GeV}^2 \quad ; \quad x_o\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) = .50 \qquad (2.8)$$

For completeness we also give the mixing matrix which can be parametrized to first order in the small parameters $\varphi_{\pi^o\eta}$, $\varphi_{\pi^o\eta'}$, as :

$$\begin{bmatrix} \eta^3 \\ \eta^8 \\ \eta^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_{\pi^o\eta} & -\varphi_{\pi^o\eta'} \\ \cos\theta\,\varphi_{\pi^o\eta} + \sin\theta\,\varphi_{\pi^o\eta'} & \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta\,\varphi_{\pi^o\eta} + \cos\theta\,\varphi_{\pi^o\eta'} & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pi^o \\ \eta \\ \eta' \end{bmatrix} \qquad (2.9)$$

The mixing angles are

$$\theta = -10^\circ 2 \quad ; \quad \varphi_{\pi^o\eta} = .011 \quad ; \quad \varphi_{\pi^o\eta'} = .0017 \qquad (2.10)$$

These values lead to a reasonable agreement with experimental data in the standard analysis of the decays $\psi' \to \psi + \pi^o$ or η and $\psi' \to \gamma + \eta$ or η' [15] .

In our study of $\eta, \eta' \to 3\pi$ decays only the combination $x_o(1+\frac{\varepsilon}{2})$ comes in and and we have no need to know the exact values of x_o and ε . However the consistency of the 1/N approach implies that f_o cannot be too much different from f_π . The best place to check for this is to consider the decay rate

of $\eta' \to 2\gamma$ which is very sensitive to the parameter x_o

$$\Gamma(\eta' \to 2\gamma) \approx \frac{1}{3}\left(\frac{m_{\eta'}}{m_{\pi^o}}\right)^3 \left[2\sqrt{2}\, x_o \cos\theta + \sin\theta\right]^2 \Gamma(\pi^o \to 2\gamma) \qquad (2.11)$$

$x_o = .90$ yields $\Gamma(\eta' \to 2\gamma) = 5$ keV and $\Gamma(\eta \to 2\gamma) = 360$ eV which are in good agreement with experiments : $\Gamma_{exp}(\eta' \to 2\gamma) = 5.3 \pm 2$ keV, $\Gamma_{exp}(\eta \to 2\gamma) = 325 \pm 50$ eV.

To conclude this section we want to emphasize that the parameter $x_o(1+\frac{\varepsilon}{2})$ affects greatly the $(\pi^o\text{-}\eta^o)$ mixing which becomes about half the standard one. SU(3) breaking effects could also influence the $(\pi^o\text{-}\eta^8)$ and $(\pi^o\text{-}\eta^o)$ mixing. For instance we could assume the vacuum to be SU(3) symmetric ie $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle = \sigma$ but impose the relation $f_K \approx 1.2\, f_\pi$ taken from experiment. Then in order to reproduce the masses of the $(\eta\ ,\ \eta')$ system and the experimental decay widths $\Gamma(\eta \to 2\gamma)$ and $\Gamma(\eta' \to 2\gamma)$ we must have $f_8 \approx f_K$, $f_o \approx 1.09\ f_\pi$, $\theta \approx -12°$ and $\varepsilon \approx -.98$. If we modified the Dashen's relations for the contribution $\mu^2_\gamma(\pi_a)$ of virtual photons to the pseudoscalar masses in the same spirit, by assuming $f_K^2\, \mu^2_\gamma(K^+) = f_\pi^2 \mu^2_\gamma(\pi^+)$, then we would get a significant change in the value of $\delta m^2 = (m_u - m_d)\frac{\sigma}{f_\pi^2}$ which implies in particular an increase of 25% in the decay rate of $\eta \to 3\pi$. However it is not clear if this is a consistent way of taking into account the SU(3) breaking effects and the corrections to the Dashen's formula, so we will use Eqs. (2.7,8,10)in the following.

3. $\eta,\eta' \to 3\pi$ CURRENT ALGEBRA CALCULATION

The three pions decay mode of η (or η') cannot proceed through the flavor independent part of the Q.C.D. hamiltonian which conserves G - parity. Because of Sutherland's theorem these decay modes cannot proceed through the second order of the electromagnetic interaction (or at least they would be very small). The amplitude $\mathcal{M}(s,t,u)$ for the decay $\eta(\eta') \to \pi^+\pi^-\pi^0$ must therefore involve the flavor dependent part of the Q.C.D. hamiltonian, ie, the quark mass terms which breaks the isospin symmetry

$$\mathcal{M}(s,t,u) = \langle \pi^+(q_1)\,\pi^-(q_2)\,\pi^0(q_3) \,|\, \bar{q} M q \,|\, \eta(\eta') \rangle \qquad (3.1)$$

This amplitude can be manipulated with the standard Current Algebra techniques. There are two possible approaches to this problem : the first one consists in deriving the well known current algebra results for the matrix element in the limit $q_1 \to 0$ and $q_3 \to 0$. From this one knows two boundary conditions for $\mathcal{M}(s,t,u)$ and hence postulates a twice subtraction dispersion relation with the absorptive part given by the three body unitarity condition à la Khuri-Treiman [19]. The second approach, which is adopted here, uses the standart current algebra manipulation techniques to extract the matrix element with the two body unitarity relation satisfied exactly. The three body unitarity relation is satisfied by adding a correction term which is expected to be non negligible. The advantage of this method is that the main features of the effective Lagrangian or linear σ model can be traced, but our result is more general. We will show in the appendix that for the $\eta' \to 3\pi$ decay these two approaches are equivalent. For the $\eta' \to 3\pi$ decay the twice subtracted dispersion relation has to be modified because the Bremstrahlung terms which are dominated by the ρ do not have the same structure as the subtractions constants.

From the reduction formula and the P.C.A.C hypothesis for the pion fields and neglecting the mixing of the π^0, we have :

$$\mathcal{M}(s,t,u) = \frac{\sqrt{2}}{f_\pi^3} \int d^4x\, d^4y\, d^4z\, e^{i(q_1 x + q_2 y + q_3 z)} \langle 0 | T\{\partial^\alpha A^+_\alpha(x)\, \partial^\beta A^-_\beta(y)\, \partial^\gamma A^3_\gamma(z)\, \bar{q} M q\} | \eta(\eta') \rangle \tag{3.2}$$

where $f_\pi = 135$ MeV. Eq. (3.2) is strictly valid only at $q_1^2 = q_2^2 = q_3^2 = 0$ but we will make the usual smoothness assumption and use Eq. (3.2) with the pions on mass shell. The method used in (I) consists in symmetrizing with respect to the three pions. After lengthy algebraic manipulations this symmetrization yields the formula

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6} \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \frac{\partial}{\partial x_j^\beta} \frac{\partial}{\partial x_k^\gamma} T\{A_i^\alpha(x_i) A_j^\beta(x_j) A_k^\gamma(x_k)\, \bar{q} M q\} \\
&= T\{\partial_\alpha A_i^\alpha(x_i)\, \partial_\beta A_j^\beta(x_j)\, \partial_\gamma A_k^\gamma(x_k)\, \bar{q} M q\} \\
&+ \frac{1}{6} \delta(x_i^0)\delta(x_j^0)\delta(x_k^0) \sum_{i,j,k} [A_k^0(x_k), [A_j^0(x_j), [A_i^0(x_i), \bar{q} M q]]] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \delta(x_j^0)\delta(x_k^0)\, T\{[A_k^0(x_k), [A_j^0(x_j), \bar{q} M q]], \partial_\alpha A_i^\alpha(x_i)\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \delta(x_i^0)\, T\{[A_i^0(x_i), \bar{q} M q], \partial_\beta A_j^\beta(x_j), \partial_\gamma A_k^\gamma(x_k)\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \delta(x_k^0 - x_j^0)\, T\{[A_k^0(x_k), \partial_\beta A_j^\beta(x_j)], \partial_\alpha A_i^\alpha(x_i), \bar{q} M q\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \delta(x_i^0)\delta(x_j^0 - x_k^0)\, T\{[A_i^0(x_i), \bar{q} M q], [A_k^0(x_k), \partial_\beta A_j^\beta(x_j)]\} \\
&+ \frac{1}{6} \sum_{i,j,k} \delta(x_j^0 - x_i^0)\delta(x_k^0 - x_i^0)\, T\{[A_k^0(x_k), [A_j^0(x_j), \partial_\alpha A_i^\alpha(x_i)]], \bar{q} M q\} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k^\gamma} \left[\delta(x_i^0 - x_k^0)\, T\{[A_i^0(x_i), A_k^\gamma(x_k)], \partial_\beta A_j^\beta(x_j), \bar{q} M q\}\right] \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \frac{\partial}{\partial x_k^\gamma} \left[\delta(x_j^0)\delta(x_i^0 - x_k^0)\, T\{[A_i^0(x_i), A_k^\gamma(x_k)], [A_j^0(x_j), \bar{q} M q]\}\right]
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$+\frac{1}{3}\sum_{i,j,k}\frac{\partial}{\partial x_k^\gamma}\left[\delta(x_i^0-x_k^0)\delta(x_j^0-x_k^0)\,T\{[A_j^0(x_j),[A_i^0(x_i),A_k^\gamma(x_k)]],\bar{q}Mq\}\right]$$

Using naively the anticommutation rules for the quark fields, the "sigma" terms

$$\delta(x_i^0-x_j^0)\,[A_i^0(x_i),\partial_\alpha A_j^\alpha(x_j)]=(m_u+m_d)\,\delta_{ij}\,\bar{q}(x_i)q(x_j)\,\delta^4(x_i-x_j) \tag{3.4}$$

are of higher order in the light quark masses m_u , m_d and will be neglected as usual. The explicit evaluation of the other commutators gives the formula :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(s,t,u) &= q_{1\alpha}q_{2\beta}q_{3\gamma}\frac{\sqrt{2}}{f_\pi^3}\int d^4x\,d^4y\,d^4z\,\exp(iq_1x+iq_2y+iq_3z)\times\\
&\qquad\times\langle 0|\,T\{A_\alpha^+(x)A_\beta^-(y)A_\gamma^3(z)\,\bar{q}Mq\}|\,\eta(\eta')\rangle\\
&-\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{f_\pi^3}(m_u-m_d)\langle 0|\,v\,|\,\eta(\eta')\rangle\\
&+\frac{\sqrt{2}}{2f_\pi^2}(m_u-m_d)\left(\langle\pi^-|\,u_+\,|\,\eta(\eta')\rangle+\langle\pi^+|\,u_-\,|\,\eta(\eta')\rangle\right)\\
&+\frac{\sqrt{2}}{f_\pi}(m_u-m_d)\langle\pi^+\pi^-|\,v\,|\,\eta(\eta')\rangle\\
&-\frac{\sqrt{2}}{2f_\pi^2}\,i\Big\{(q_3-q_1)^\gamma\int d^4x\,e^{i(q_1+q_3)x}\langle\pi^-(q_2)|\,T\{V_\gamma^+(x),\bar{q}Mq\}|\,\eta(\eta')\rangle\\
&\qquad-(q_3-q_2)^\gamma\int d^4x\,e^{i(q_2+q_3)x}\langle\pi^+(q_1)|\,T\{V_\gamma^-(x),\bar{q}Mq\}|\,\eta(\eta')\rangle\Big\}\\
&+\frac{2}{3}\frac{\sqrt{2}}{f_\pi^3}(2q_3-q_1-q_2)_\gamma\int d^4x\,e^{i(q_1+q_2+q_3)x}\langle 0|\,T\{A_3^\gamma(x),\bar{q}Mq\}|\,\eta(\eta')\rangle
\end{aligned} \tag{3.5}$$

where $u_a\equiv\bar{q}\,\frac{\lambda^a}{2}\,q$, $v_a\equiv\bar{q}\,\gamma_5\,\frac{\lambda^a}{2}\,q$, $v\equiv\frac{1}{\sqrt{3}}\,(\sqrt{2}v_0+v_8)$. The 2nd term on the R.H.S. of Eq. (3.5) is the Fourier transform of the triple Equal Time Commutator (ETC), the 3rd and 4th that of double ETC and the 5th term is that of the single ETC. The 6th and 7th terms are the only bremstrahlung terms

which survive. The last term has some analogy with the bremstrahlung terms.

If we make the assumption that the matrix elements $<\pi_o|u_3|\ \eta(\eta')>$ are slowly varying function of momenta, the matrix elements $<0|v|\ \eta(\eta')>$ can be related to $<\pi_o\ |u_3|\eta(\eta')>$ by the soft pion theorem

$$\frac{\sqrt{2}}{f_\eta}\langle 0|v|\eta(\eta')\rangle = \langle \pi^o|u_3|\eta(\eta')\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \pi^\pm|u_\mp|\eta|\eta'\rangle \qquad (3.6)$$

which in turn are linear combinations of the mass matrix elements of Eq. (2.6)

The matrix element of the single commutator term $<\pi^+(q_1)\ \pi^-(q_2)\ |v|\ \eta(\eta')>$ must have the phase of the S-wave, I = 0, pion-pion interaction. Then we can apply the usual thechniques of dispersion relation to the function

$$g(s) = \langle \pi^+(q_1)\,\pi^-(q_2)\,|v|\,\eta(\eta')\rangle \qquad (3.10)$$

where $s = (q_1 + q_2)^2$ to show that g(s) ia an analytic function in s-plane with a cut from $4m_\pi^2$ to ∞, with the two pions on the mass shell. Using analyticity and elastic unitarity, we can write

$$g(s) = g(m_\pi^2)\ D^{-1}(s, m_\pi^2) \qquad (3.11)$$

with

$$D^{-1}(s,m_\pi^2) = \exp\frac{s-m_\pi^2}{\pi}\int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds'\ \frac{\delta_o(s')}{(s'-m_\pi^2)(s'-s-i\varepsilon)} \qquad (3.12)$$

where δ_o is the S-wave I = 0, $\pi\pi$ phase shift. We can calculate $g(m_\pi^2)$ if we make again the smoothness assumption and apply the soft pion theorem

$$g(m_\pi^2) = -\frac{1}{f_\pi} \langle \pi^+ | u_- | \eta | \eta' \rangle \qquad (3.13)$$

where u has to carry a momentum $k = p_{\eta,\eta'} - q_+$ to insure the conservation of the 4-momentum. Our assumption here is that g(s) depends weakly on the scalar product involving k so that no correction is needed in the physical limit $k \to 0$. Alternatively we can keep k = 0 by taking the η off the mass shell with $p^2 = s = m_\pi^2$. The physical amplitude is obtained by the analytical continuations in s variable, assuming that there is no correction due to the self energy operator of the η . Both methods lead to the same result.

Eqs. (3.10-13) are fundamental in our approach. As an alternative, we could follow the standard procedure to analyze $K \to 3\pi$ in terms of $K \to 2\pi$ i.e. we could define an "experimental" value $g(s = m_\eta^2)$ from the observed linear neutral pion spectrum extrapoled to $s = m_\eta^2$. Following this procedure we would obtain $|g(s = m_\eta^2)|_{exp} = 1.6 \pm .1$ as compared with our prediction Eq.(3.11) $g(s = m_\eta^2) = 1.45\, e^{i50^\circ}$ with the function $D^{-1}(s, m_\pi^2)$ given below. The function $D^{-1}(s, m_\pi^2)$ can be parametrized from the experimental knowledge of δ_o. The approximation used in the study of $K\ell_4$ decay

$$D^{-1}(s, m_\pi^2) = \left[\frac{(s_1 - m_\pi^2) + \sqrt{3}\, a\, m_\pi (s_1 - 4m_\pi^2)}{(s_1 - s) - i a (s_1 - 4m_\pi^2)\sqrt{s - 4m_\pi^2}} \right]^{1/2} \qquad (3.14)$$

where $a = 0.25\, m_\pi^{-1}$ is the S-wave I = 0 $\pi\pi$ scattering length and $s_1 = 14\, m_\pi^2$, gives a phase shift δ_o which agrees with the experimental values from threshold up to 900 MeV. Eq. (3.14) has the correct analytical properties and is ghost free. It is a non relativistic approximation of a more general expression which is given in Ref. 7 and which is closely connected with the work of Li and Pagels [16] upon the nonanalytical perturbation theory about a chiral symmetry. The modulus and the phase of $D^{-1}(s, m_\pi^2)$ are plotted in Fig.1. It can be seen that the effect of the square root threshold singularity

$\sqrt{s - 4m_\pi^2}$ is quite strong. The modulus of $D^{-1}(s, m_\pi^2)$ in the physical region of $\eta \to 3\pi$ is about 40 % larger than its value at $s = m_\pi^2$. This fact accounts for the resolution of the $\eta \to 3\pi$ problem in (I) whereas the standard current algebra soft pion treatment assumes $g(s) \simeq g(m_\pi^2)$. It is also possible to understand the successful prediction of the standard treatment about the behavior of the Dalitz plot in the $\eta \to 3\pi$ decay. Indeed the imaginary part and the modulus of $D^{-1}(s, m_\pi^2)$ turn out to be linear functions of s in the physical region of $\eta \to 3\pi$ with a very good approximation. The precise value of the slope depends upon the bremstrahlung terms that we shall discuss next. Of course the Dalitz plot in the $\eta' \to 3\pi$ decay will be completely different from that of the $\eta \to 3\pi$ decay as we shall see.

The bremstrahlung terms [6th and 7th terms on the R.H.S. of Eq. (3.5)] are antisymmetric with respect to the interchanges of the pions and represent the emission of a pair of P-wave pions. We will assume ρ dominance for these terms in the physical region.

The last term on the R.H.S of Eq. (3.5) has the same symmetry properties as the bremstrahlung terms. However this is a contact term (ρ dominance was erroneously applied to it in (I), but the final result is little affected). We can use the soft pion theorem to evaluate this term. Define

$$A_\mu = \int d^4x \; e^{ipx} \langle 0 | T \{ A_\mu^3(x) \, \bar{q} M q \} | \eta(p) \rangle \qquad (3.15)$$

The most general Lorentz invariant structure for A_μ is $A_\mu = a(p^2)\, p_\mu$. Then using a standard technique

$$p^\mu A_\mu = m_\eta^2 \, a(p^2) = \frac{f_\pi m_\pi^2}{m_\pi^2 - m_\eta^2} \langle \pi^0 | \bar{q} M q | \eta \rangle - (m_u - m_d) \langle 0 | v | \eta \rangle \qquad (3.16)$$

Neglecting terms of order m_π^2/m_η^2 we get

$$\int d^4x\, e^{i(q_1+q_2+q_3)x} \langle 0\, T\{A_3^Y(x)\bar{q}Mq\}|\eta\rangle = \frac{(m_u-m_d)\langle 0|v|\eta\rangle}{m_\pi^2-m_\eta^2}(q_1+q_2+q_3)^Y \tag{3.17}$$

It can be shown in the same way that the bremstrahlung terms are proportional to the matrix element $\langle \pi^o | u_3 | \eta \rangle$.

Collecting everything together, the 0th order amplitudes for the decay $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^o$ and $\eta' \to \pi^+\pi^-\pi^o$ can be written respectively

$$\mathcal{M}^o(\eta\to\pi^+\pi^-\pi^o) = -\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}\left[\cos\theta - \sqrt{2}\,x_o\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\theta\right]\left\{D^{-1}(s,m_\pi^2) - \frac{2}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{s-s_o}{m_\eta^2-m_\pi^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m_\rho^2-m_\pi^2}{m_\eta^2-m_\pi^2}\right)\left(\frac{t-s}{m_\rho^2-u} + \frac{u-s}{m_\rho^2-t}\right)\right\} \tag{3.18}$$

$$\mathcal{M}^o(\eta'\to\pi^+\pi^-\pi^o) = -\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}\,x_o\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\theta + \sin\theta\right]\left\{D^{-1}(s,m_\pi^2) - \frac{2}{3} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{s-s_o}{m_{\eta'}^2-m_\pi^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{m_\rho^2-m_\pi^2}{m_{\eta'}^2-m_\pi^2}\right)\left(\frac{t-s}{m_\rho^2-u-im_\rho\Gamma_\rho(u)} + \frac{u-s}{m_\rho^2-t-im_\rho\Gamma_\rho(t)}\right)\right\} \tag{3.19}$$

where the superscript 0 on $\mathcal{M}$ indicates that the 1st term on the R.H.S. of Eq. (3.5) has been neglected, $s = (q_1+q_2)^2$, $t = (q_1+q_3)^2$, $u = (q_2+q_3)^2$

$$s+t+u = m_{\eta(\eta')}^2 + 3m_\pi^2 = 3s_o \quad , \quad t-u = -p(s)\cos\varphi$$
$$p(s) = \left[(s-4m_{\pi^\pm}^2)\left((m_{\eta(\eta')}^2 - s - m_{\pi^o}^2)^2 - 4s\,m_{\pi^o}^2\right)/s\right]^{1/2} \tag{3.20}$$

For η' we take into account the finite width of ρ

$$\Gamma_\rho(s) = \Gamma_\rho(m_\rho^2)\left[(s-4m_\pi^2)^{3/2}/\sqrt{s}\right]\left[m_\rho/(m_\rho^2-4m_\pi^2)^{3/2}\right] \tag{3.21}$$

The parameters which appear in the normalization of the amplitudes have been defined in Eqs. (2.6-10).

Eqs. (3.18, 19) apart from the $\eta - \eta'$ mixing coefficients, are what one would expect from the linear σ model if the $\frac{1}{D}$ factor is replaced by the propagator of the scalar meson. But they are more general. In fact, if we incorrectly neglect the square root threshold behavior by approximating $D^{-1}(s, \mu^2) = (m^2 - \mu^2)/(m_\varepsilon^2 - s)$ we would reproduce essentially Raby's result result [5] which showed little enhancement. The effect of the square root threshold singularity would only show up in the loop correction to the σ model which was not done in ref. 5.

The modulus of the amplitude averaged over $\cos\varphi$ for $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0$ is plotted in Fig. 2 in the physical region. Fig. 2 shows that the modulus of the matrix element, eq. (3.18), is linear with a very good approximation and can be parametrized as

$$|\mathcal{M}^0(\eta\to\pi^+\pi^-\pi^0)| = (2.31)\left(-\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}\right)\left[\cos\theta - \sqrt{2}\,x_0\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\theta\right]\left(\frac{1}{3}+(.90)\frac{s-s_0}{m_\eta^2-m_\pi^2}\right) \tag{3.22}$$

which yields $\Gamma^0(\eta\to\pi^+\pi^-\pi^0) = 390$ eV compared with the experimental values 204 ± 29 eV. The slope is 10 % smaller than the experimental value $1.00 \pm .01$. With the amplitude given in Eq. (3.19) the $\eta' \to \pi^+\pi^-\pi^0$ decay width is found to be 1.05 keV.

The calculation of $\Gamma(\eta, \eta' \to 3\pi^0)$ follows along the same lines except that the bremstrahlung terms do not contribute. With the symmetrization factor properly taken into account, the matrix elements for these modes read :

$$\mathcal{M}^{o}(\eta \to 3\pi^{o}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\frac{2}{f_\pi^2} \frac{\delta m^2}{\sqrt{3}} \right) \left[\cos\theta - \sqrt{2}\, x_o \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin\theta \right] \times$$
$$\times \left\{ D^{-1}(s, m_\pi^2) + D^{-1}(t, m_\pi^2) + D^{-1}(u, m_\pi^2) - 2 \right\} \qquad (3.23)$$

and a similar expression for $\mathcal{M}^{o}(\eta' \to 3\pi^{o})$ apart from the mixing factor. The partial decay widths are predicted to be $\Gamma^{o}(\eta \to 3\pi^{o}) = 630$ eV and $\Gamma^{o}(\eta' \to 3\pi^{o}) = 1.2$ keV.

At the level of approximation of Eqs. (3.18, 19, 23) the unitarity condition for three body scattering à la Khuri-Treiman [9] is satisfied within an accuracy of 30 % for the $\eta \to 3\pi$ decays and this explains the rather large discrepancy between the experimental results and the predictions of Eqs. (3.18, 3.23) which are about a factor 2 too big. In order to improve agreement with unitarity we can try a correction term which satisfies the following conditions :

(a) It satisfies the current algebra constraints, ie. , it vanishes at $s = m_\pi^2$ and $s = m_\eta^2$ or $m_{\eta'}^2$.

(b) The amplitude has a discontinuity across the s cut.

Such a function is $\lambda[D^{-1}(s, m_\pi^2) - 1] \quad (m_\eta^2 - s)/(m_\eta^2 - s_o)$ where λ is in general complex and is determined by the condition that unitarity be exact at the symmetric point $u = s = t = s_o$. In (I) we had taken λ real and neglected its imaginary part. Here we will relax this assumption which is not valid in general. At first sight, the choice of this function appears to be somewhat arbitrary. We show in the appendix this same result can be derived from a twice subtracted Khuri-Treiman equation.

If we neglect the I = 2 S-wave $\pi\pi$ interaction which is experimentally small, the absorptive part of $\mathcal{M}(s,t,u)$ is given, from unitarity, by

$$\text{Abs}\, \mathcal{M}(s,t,u) = \left[\mathcal{M}(s) + \frac{2}{3} \overline{\mathcal{M}}(s) \right] f_0^*(s) \tag{3.24}$$

where $f_0(s) = e^{i\delta_0(s)} \sin\delta_0(s)$

$$\overline{\mathcal{M}}(s) = \frac{1}{2} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[\mathcal{M}(t) + \mathcal{M}(u) \right]$$

and, omitting the normalization factor,

$$\mathcal{M}(s) = D^{-1}(s, m_\pi^2) - \lambda \left(D^{-1}(s, m_\pi^2) - 1 \right) (M^2 - s) / (M^2 - s_0)$$

$$- 2/3 - 1/2 \, (s - s_0) / (M^2 - m_\pi^2)$$

$$+ (m_\rho^2 - m_\pi^2)(s - s_0) / (m_\rho^2 - s_0 - i m_\rho \Gamma_\rho(s_0)) / (M^2 - m_\pi^2) \tag{3.25}$$

with $M = m_\eta$ or $m_{\eta'}$, according to the case into consideration.
Imposing the condition (3.24) at $s = t = u = s_0$, the equation for the parameter λ reads

$$1 - \frac{3}{2} \lambda = \overline{\mathcal{M}}(s_0) \tag{3.26}$$

which yields the values, for the η and η' decays respectively,

$$\lambda_\eta = .31 - .19\, i \tag{3.27 a}$$

$$\lambda_{\eta'} = .64 - .22\, i \tag{3.27 b}$$

The corresponding decay widths are found to be

$$\Gamma(\eta \to \pi^+ \pi^- \pi^0) = 245 \text{ eV} \tag{3.28 a}$$

$$\Gamma(\eta \to \pi^0 \pi^0 \pi^0) = 390 \text{ eV} \tag{3.28 b}$$

$$\Gamma(\eta' \to \pi^+\pi^-\pi^0) = 260\ \text{eV} \qquad (3.28\ c)$$

$$\Gamma(\eta' \to \pi^0\pi^0\pi^0) = 150\ \text{eV} \qquad (3.28\ d)$$

The modulus of the corrected amplitudes are plotted in Figs.(2-3). The spectrum of $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0$ presents no qualitative change. $|\mathcal{M}(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0)|$ is still a linear function of the neutral pion energy with a very good approximation and can be parametrized as

$$|\mathcal{M}(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0)| = (1.83)\left(-\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}\right)\left[\cos\theta - \sqrt{2}\,x_0\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\theta\right] \times \left(\frac{1}{3} + (1.01)\,\frac{s-s_0}{m_\eta^2 - m_\pi^2}\right) \qquad (3.29)$$

The slope is now within the experimental errors. The change in the decay width $\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0)$ with respect to the value quoted in (I) comes in part from the mixing factor $[\cos\theta - \sqrt{2}\,x_0(1+\frac{\varepsilon}{2})\sin\theta]^2 \simeq (1.11)^2$ which was not taken into account in (I) and also from numerical approximations made in that paper in the integration over phase space. There is also a non negligible effect coming from the fact that $|\lambda_\eta| = .36$ instead of .25 in (I).

Fig. 3 shows that the interference effect due to the ρ resonance is important in the modulus of the amplitude $\mathcal{M}(\eta' \to \pi^+\pi^-\pi^0)$. The amplitude $\mathcal{M}(\eta' \to 3\pi^0)$ plotted in Fig. 3 presents no structure. Its modulus is as flat as that of $\mathcal{M}(\eta \to 3\pi^0)$ in the whole physical region. But the most notable consequence of the unitarity correction is the drastic diminution of the decay widths of η', about a factor four for $\Gamma(\eta' \to \pi^+\pi^-\pi^0)$ and nearly one order of magnitude for $\Gamma(\eta' \to \pi^0\pi^0\pi^0)$. This implies that the values quoted in Eqs.(3.28 c,d) are not as reliable as those of $\eta \to 3\pi$ because the amplitudes for $\eta' \to 3\pi$ depends too sensitively upon the final state interactions. Unlike the $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0$ decay, the bremstrahlung terms dominates the $\eta' \to \pi^+\pi^-\pi^0$

amplitude because of the ρ resonance. They alone give rise to a contribution of 250 eV in the rate. Because of these terms, which are absent in the $\eta' \to 3\pi^o$ amplitude, and the complex interference effect, the ratio $\Gamma(\eta' \to 3\pi^o)/\Gamma(\eta' \to \pi^+\pi^-\pi^o)$ is predicted to be .6 whereas the ratio $\Gamma(\eta \to 3\pi^o)/\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^o)$ is predicted to be 1.6 as it is expected from bose statistics and phase space corrections if there is no interference effects. However, if the Bremstrahlung terms do not affect noticeably the $\eta \to 3\pi$ decay rate, they do have an effect on the spectrum. Had we put $m_\rho = \infty$ the slope would decrease by 15 % and the spectrum would present some significant departure from linearity.

4. CONCLUSION

The value given in Eq. (3.28 a) for the partial decay width of η into the $\pi^+\pi^-\pi^o$ mode, $\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^o) = 245$ eV, is within 20 % of the experimental value 200 ± 30 eV which is a satisfactory result. The predicted slope for $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^o$ agrees with the measured one. However there still is a discrepancy between the predicted ratio $\Gamma(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^o)/\Gamma(\eta \to \pi^o\pi^o\pi^o) = .63$ and the present experimental value which is .76. The decay widths for the $\eta \to 3\pi$ modes with and without three body unitarity correction differ by about 60 % which certainly is a large correction but we can have a reasonable confidence in our calculation scheme for these decays.

However the change induced by the unitarity correction for the $\eta' \to 3\pi$ decay modes is much bigger. It is clear that the final state interaction is much more difficult to take into account in the $\eta' \to 3\pi$ decays. The pion-pion S-wave phase shift as given by Eq. (3.14) agrees only with the experimental phase up to 900 MeV. In order to see the sensitivity of our calculation upon the high energy behaviour of the phase shift, let us multiply the expression for $D^{-1}(s,m_\pi^2)$ given in Eq. (3.14) by the $\varepsilon(1.3\ \text{GeV})$ propagator $(m_\varepsilon^2 - m_\pi^2)/(m_\varepsilon^2 - s)$ and estimate the correction in the decay rate as that of the squared modulus of the amplitude at the symmetric point $s=t=u=s_o$. This gives a correction of 20 % in the rate for $\eta \to 3\pi$ and of 60 % for $\eta' \to 3\pi$. We can regard these numbers as the respective theoretical uncertainties of our calculation.

Moreover there is another mechanism which can potentially affect our results for $\eta' \to 3\pi$ at the same level which is the mixing of π^o with

η that we have neglected in the calculation of the previous section. Indeed it has been argued [18] that the $\eta - \pi^o$ mixing is the dominant mechanism for $\eta' \to 3\pi$ because the main decay mode for η' is $\eta' \to \eta + 2\pi$. We can test this assumption by estimating the ratio $\Gamma(\eta' \to \pi^o\pi\pi)/\Gamma(\eta' \to \eta\pi\pi)$ with the approximation that the $\eta' \to 3\pi$ and $\eta' \to \eta + 2\pi$ amplitudes are essentially constant over phase space. This $\eta' \to 3\pi$ amplitude, unlike that obtained from current algebra, vanish when $p_{\pi o} \to 0$ due to the Adler's zero when $p_\eta \to 0$. A correct calculation of this amplitude must satisfy, in principle, this condition (see ref. [20]). In practice, it is not needed to modify the assumption of constant matrix element. From the experimental knowledge of $\Gamma_{exp}(\eta' \to \eta\pi\pi) = 180 \pm 60$ keV and taking the $\eta - \pi^o$ mixing angle from Eqs. (2.9,10) we get $\Gamma(\eta' \to \pi^+\pi^-\pi^o) = 220 \pm 70$ eV and $\Gamma(\eta' \to 3\pi^o) = 110 \pm 40$ eV, assuming isospin conservation in the strong process $\eta' \to \eta\pi\pi$. These numbers are of the same order of magnitude as those of Eqs. (3.28 c,d). So it is clear that this mechanism cannot be neglected when studying the decay $\eta' \to 3\pi$. However, because $\eta' \to \eta\pi\pi$ is a strong process, the sign of its amplitude relative to that of Eq. (3.19) is not known and we cannot calculate reliably the interference effects. This means that our calculation for $\eta' \to 3\pi$ width can be correct only within a factor of 2, but nevertheless it is certainly in agreement with the preliminary experimental result $\Gamma_{exp}(\eta' \to 3\pi^o) < 850$ eV [17] .

We end by noting the important effect of the parameter $x_o(1 + \frac{\varepsilon}{2})$ which was introduced in the study of the pseudoscalar nonet mass matrix. If instead of .5, we take $x_o(1 + \frac{\varepsilon}{2}) = 1$, which is the usual quark model prediction, then the $\eta' \to 3\pi$ decay width is increased by a factor of 6. Conversely a measure of the $\eta' \to \pi\rho$ decay rate will be a sensitive test of the structure of the mass matrix of the (π^o, η, η') system, as it is independent of the matrix element derived from $\eta' \to \eta\pi\pi$.

ACKNOWLEDGEMENTS

One of us (T.N.T.) would like to thank K. Johnson for useful discussions and the Institute of Theoretical Physics at Santa Barbara and the Theory Division at CERN for their hospitality.

***

APPENDIX

For completness we give in this appendix an alternative determination of the unitarity correction which provides a theoretical justification for the correction term that was introduced in sect. 3. We start from the uncorrected amplitude Eq. (3.18) where we let $m_\rho = \infty$ for simplicity, which is equivalent to the low energy approximation of the S-wave projection of the bremstrahlung terms :

$$\mathcal{M}^\circ(s) = D^{-1}(s,\mu^2) - \frac{2}{3} + \frac{s-s_0}{m^2-\mu^2} \qquad (A.1)$$

We write the full amplitude $\mathcal{M}(s)$ as

$$\mathcal{M}(s) = \mathcal{M}^\circ(s) + h(s) \qquad (A.2)$$

where the correction term h(s) satisfies the boundary conditions $h(\mu^2) = h(m^2) = 0$. The function h(s) can be determined as follows

$$\frac{m(s_+)-m(s_-)}{2i} = D^{-1}(s,\mu^2)\, e^{-i\delta}\sin\delta + \frac{h(s_+)-h(s_-)}{2i}$$

$$= e^{-i\delta}\sin\delta\left(m(s_+) + \frac{2}{3} - \frac{s-s_0}{m^2-\mu^2} + h(s_+)\right) + \frac{h(s_+)-h(s_-)}{2i}$$

$$= e^{-i\delta}\sin\delta\left(m(s_+) + \frac{2}{3}\,\overline{m}(s)\right) \tag{A.3}$$

It follows from this equation that :

$$\frac{h(s_+)-h(s_-)}{2i} = e^{-i\delta}\sin\delta\left(h(s_+) - \frac{2}{3} + \frac{s-s_0}{m^2-\mu^2} + \frac{2}{3}\,\overline{m}(s)\right) \tag{A.4}$$

Hence h(s) satisfies the following integral equation :

$$h(s) = \frac{(s-\mu^2)(s-m^2)}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} ds'\, \frac{\left(h(s') + \sigma(s')\right) e^{-i\delta}\sin\delta(s')}{(s'-\mu^2)(s'-m^2)(s'-s-i\varepsilon)} \tag{A.5}$$

where

$$\sigma(s) = \frac{2}{3}\,\overline{m}(s) + \frac{s-s_0}{m^2-\mu^2} - \frac{2}{3} \tag{A.6}$$

Eq. (A.5) is an integral equation of a type first considered by Neveu and Scheck [19]. We give here a direct method for finding its solution. It can be found by first considering the homogeneous solution which is $D^{-1}(s,\mu^2)$. The inhomogeneous solution can be obtained by writing $h(s) = D^{-1}(s,\mu^2)\, g(s)$. It is straightforward to find

$$\frac{g(s_+)-g(s_-)}{2i} = D(s_+,\mu^2)\, e^{i\delta}\sin\delta\ \sigma(s) \tag{A.7}$$

Hence

$$h(s) = D^{-1}(s,\mu^2)\,\frac{(s-\mu^2)(s-m^2)}{\pi}\int_{4\mu^2}^{\infty} ds'\, \frac{D(s',\mu^2)\, e^{i\delta}\sin\delta(s')\ \sigma(s')}{(s'-\mu^2)(s'-m^2)(s'-s-i\varepsilon)} \tag{A.8}$$

Following Neveu et Scherk, let us assume as a first approximation that in the region of interest $\sigma(s)$ is a linear function of s. Then h(s) can be written as

$$h(s) = \sigma(\mu^2)\,\frac{s-m^2}{\mu^2-m^2}\left(D^{-1}(s,\mu^2)-1\right) + \sigma(m^2)\,\frac{s-\mu^2}{m^2-\mu^2}\left(D^{-1}(s,\mu^2)\,D(m^2,\mu^2)-1\right) \tag{A.9}$$

We now want to show that our correction term can directly be obtained from Eq. (A.9). To do this we calculate $\sigma(\mu^2)$ and $\sigma(m^2)$ using Eq. (A.6) with $\overline{\mathfrak{M}}(s) = \overline{\mathfrak{M}}_0(s)$ as a first iteration. Because $\mathfrak{M}_0(s)$ is a linear functions of s to a very good approximation, we shall make the 90° approximation

$$\overline{\mathfrak{M}}_0(s) = \mathfrak{M}_0\left(\frac{3s_0-s}{2}\right) \tag{A.10}$$

(Recall that $t,u = \frac{3s_0-s}{2} \pm \rho(s)\cos\theta$ where $\rho(s)$ is a kinematical factor). A straightforward calculation yields, for this first iteration, in the case of $\eta \to 3\pi$ decay :

$$\sigma_\eta^1(\mu^2) = \frac{2}{3}\,\mathfrak{M}_0\left(\frac{m^2}{2}\right) - 1 = -.40 + .32\,i \tag{A.11a}$$

$$\sigma_\eta^1(m^2) = \frac{2}{3}\,\mathfrak{M}_0(\mu^2) = 0 \tag{A.11b}$$

which shows that h(s) is indeed our correction term with

$$\lambda_\eta^1 = \frac{2}{3}\,\sigma_\eta^1(\mu^2) = .26 - .21\,i \tag{A.12}$$

The vanishing of $\sigma(m^2)$ is not just an accident. Any function $\mathfrak{M}(s)$ which is approximately linear and vanishes at $s = \mu^2$ would yield $\sigma(m^2) = 0$. With this observation, it is amusing to note that the iterated solution for h(s)

converges towards our correction function with λ_η given by

$$\lambda_\eta = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\,D^{-1}(m_\eta^2/2, \mu^2) - 4}{D^{-1}(m_\eta^2/2, \mu^2) - 4}$$
$$= .34 - .18\,i \qquad \text{(A.13)}$$

which is very closed to the value of λ obtained by satisfying the unitarity relation at $s = s_o$ (Eq. (3.27 a)) :

$$\lambda_\eta = .31 - .19\,i \qquad \text{(A.14)}$$

We conclude that, due to the excellent agreement of Eqs. (A.12) and (A.13), the solution used in the text is a good one because, the unitacity relation holds approximately in the whole physical region of the $\eta \to 3\pi$ decay .

A similar calculation can be carried out for $\lambda_{\eta'}$. Because $\sigma_{\eta'}(s)$ is not accurately a linear function of s, we do not expect to have a so good answer in this case. It is reassuring however that we have

$$\lambda_{\eta'} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2\,D^{-1}(s, m_{\eta'}^2/2, \mu^2) - 4}{D^{-1}(s, m_{\eta'}^2/2, \mu^2) - 4} \qquad \text{(A.15)}$$
$$= .64 - .19\,i$$

which compares favorably with Eq. (3.27 b) .

REFERENCES

[1] D.G. Sutherland, Phys. Letters 23, 384 (1966).

[2] See e.g. S.K. Bose and A.H. Zimmerman, Nuovo Cimento 43 A, 1165 (1966). K. Wilson, Phys. Rev. 179, 1499 (1969); J. Schechter and Y. Ueda, Phys. Rev. D4, 733 (1971); P.H. Bondi and S. Eliezer, Phys. Rev. D8, 2253 (1973) and further references in Refs [3-5]

[3] N. Cabibbo and L. Maiani, in Evolution of Particle Physics (Academic Press, 1970).
G. Parisi and M. Testa, Nuovo Cimento 67 A, 13 (1970).

[4] S. Weinberg, Phys. Rev. D11, 3583 (1975).

[5] S. Raby, Phys. Rev. D13, 2594 (1976); P. Langacker and H. Pagels, Phys. Rev. D19 2070 (1979).

[6] R.F. Dashen, Phys. Rev. 183, 1245 (1969).

[7] T.N. Truong, Phys. Letters 99B, 154 (1981).

[8] C. Roiesnel and T.N. Truong, Nucl. Phys. B187, 293 (1981).

[9] N.N. Khuri and S.B. Treiman, Phys. Rev. 119, 1115 (1960).

[10] M. Gell-Mann, R.J. Oakes and B. Renner, Phys. Rev. 175, 2195 (1968).

[11] E. Witten, Nucl. Phys. B156, 269 (1979).

[12] G. Veneziano, Nucl. Phys. B159, 213 (1979).

[13] P. Di Vecchia et al., Nucl. Phys. B181, 318 (1981).

[14] G. Veneziano, Phys. Lett. 95B, 90 (1980).

[15] H. Goldberg, Phys. Rev. Lett. 44, 363 (1980); V.A. Novikov et al., Nucl. Phys. B165, 55 (1980); J.M. Gérard, J. Pestiau and J. Weyers, Phys. Lett. 94B, 227 (1980).

[16] L.F. Li and H.Pagels, Phys. Rev. Lett. 26, 1204 (1971).

[17] Y. Prokoshkin, Private Communication.

[18] D.J. Gross, S.B. Treiman et F. Wilczek, Phys. Rev. D19, 2188 (1979).

[19] A. Neveu and J. Scherk, Ann. Phys. 57, 39 (1970).

[20] N. Deshpande and T.N. Truong, Phys. Rev. Lett. 41 (1978) 1579.

FIGURES CAPTION

Fig. 1 : Plot of the modulus of $D^{-1}(s)$ (solid line) and of its phase (dashed line)

Fig. 2 : Plot of the modulus of the amplitude $\mathcal{M}(\eta \to \pi^+\pi^-\pi^o)$ averaged over $\cos\varphi$. The normalization $-\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}[\cos\theta - x_o(1+\frac{\varepsilon}{2})\sin\theta]$ is factored out.

solid line : amplitude without unitarity correction (Eq. (3.18))

Dashed line: amplitude with unitarity correction

Fig. 3 : Plot of the modulus of the amplitudes $\mathcal{M}(\eta' \to \pi^+\pi^-\pi^o)$ dashed line) and $\mathcal{M}(\eta' \to 3\pi^o)$ (solid line) with unitarity correction and averaged over the solid angle. The normalization $-\frac{2}{f_\pi^2}\frac{\delta m^2}{\sqrt{3}}[\sqrt{2}\,x_o(1+\frac{\varepsilon}{2}).\cos\theta + \sin\theta]$ is factored out.

Fig. 1

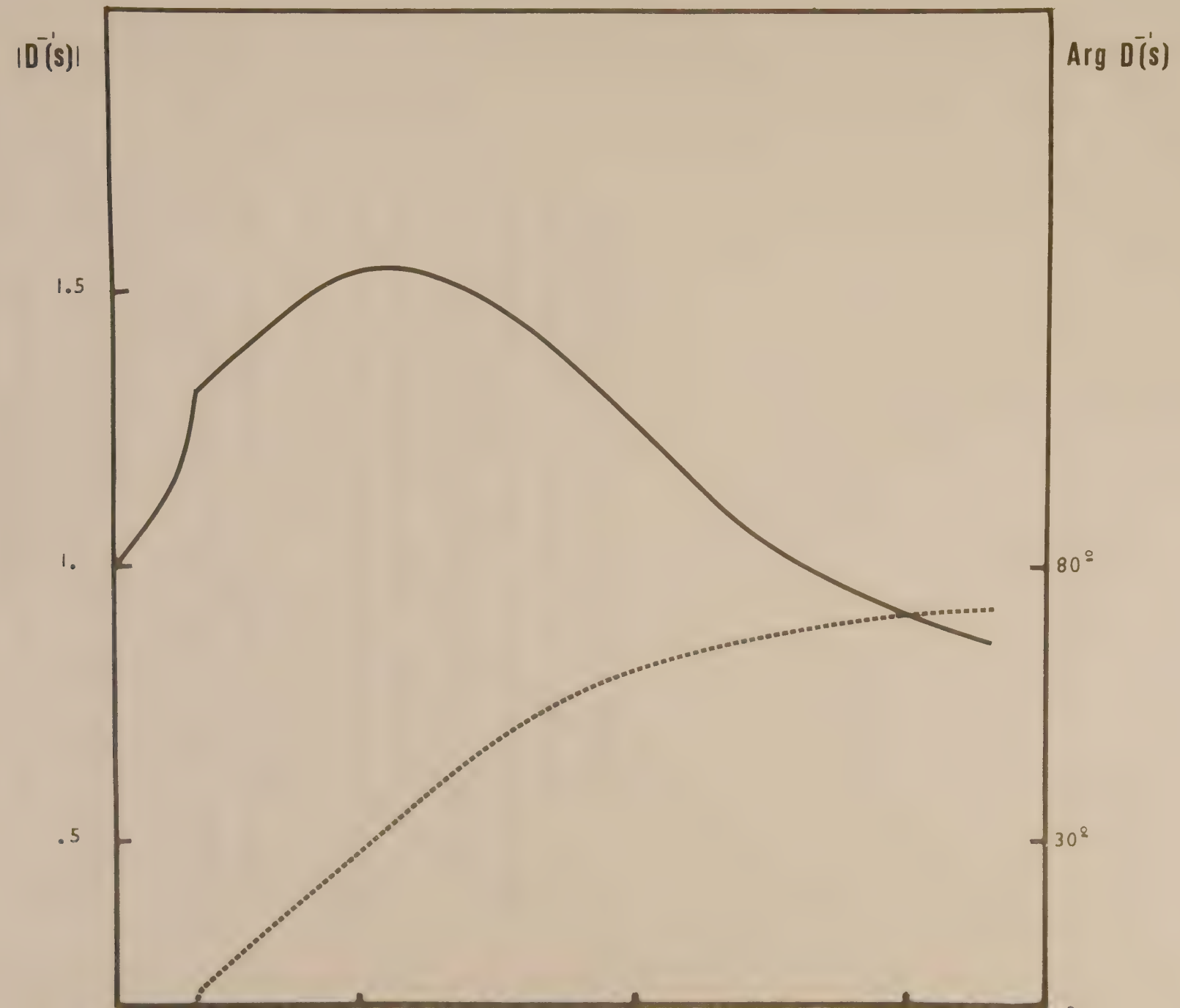


Fig. 2

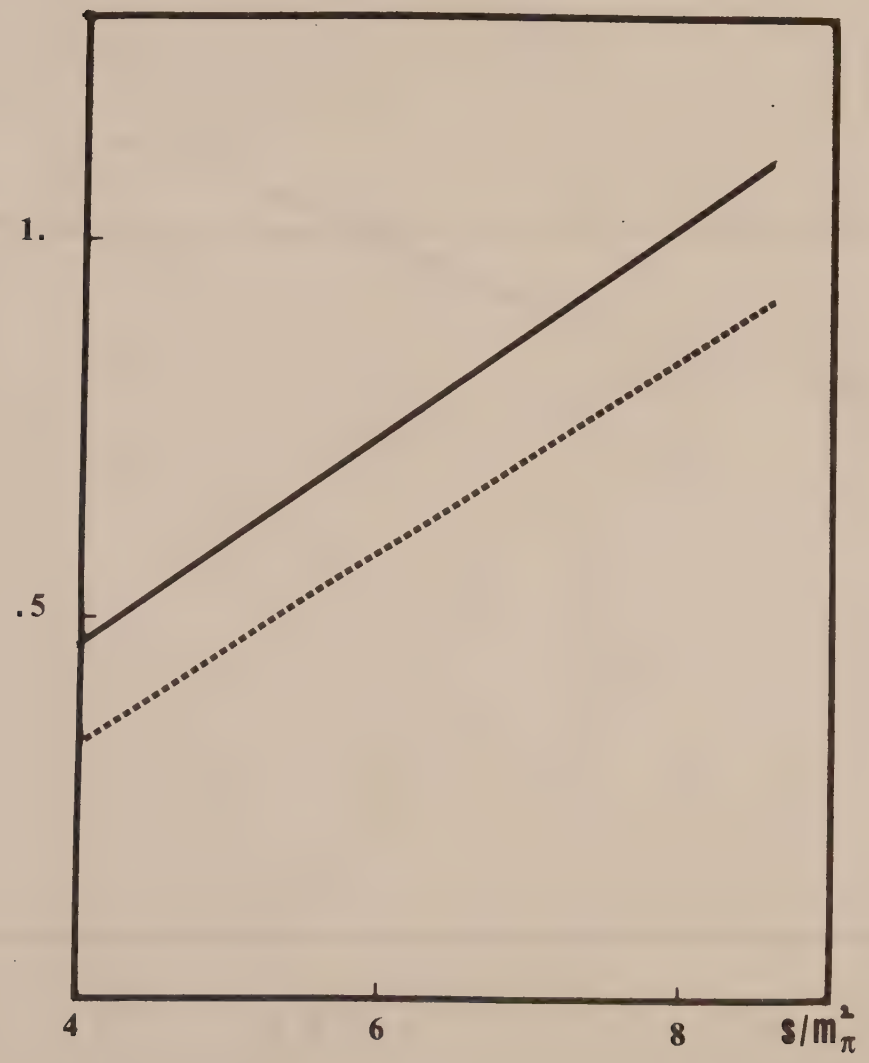
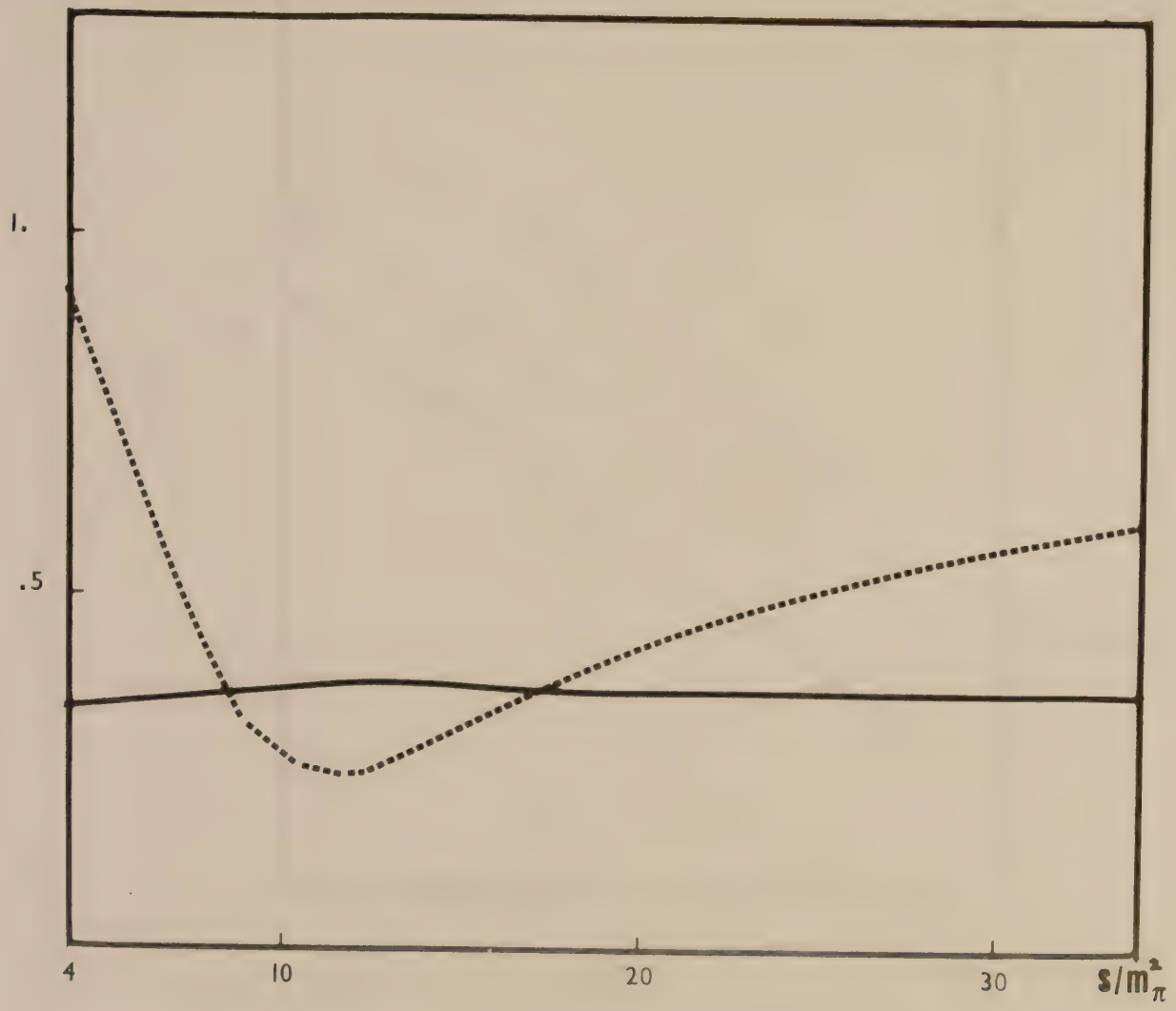


Fig. 3



CHAPITRE III

TEMPS DE VIE DU PROTON ET VALEUR DE L'ANGLE FAIBLE θ_W DANS LES THEORIES UNIFIEES

III.1) Brisure spontanée de symétrie d'une théorie grand-unifiée

Mécanisme de Higgs

Le phénomène grâce auquel les bosons vectoriels acquièrent une masse dans une théorie de jauge s'appelle brisure spontanée de la symétrie locale. Il ne s'agit pas d'ajouter un terme de brisure explicite. Un terme de masse pour les bosons vecteurs n'est pas invariant par lui-même sous une transformation de jauge locale. Cependant si on ajoute de nouvelles interactions on peut retrouver l'invariance de jauge. C'est ce qui se produit dans une théorie brisée spontanément. Le Lagrangien est encore invariant sous les transformations de symétrie, et les courants sont conservés. Dans le langage de la théorie quantique des champs, les identités de Ward sont satisfaites, ce qui est crucial pour la renormalisabilité perturbative de la théorie. Cependant la charge d'un générateur de symétrie brisée n'annihile plus le vide. Le point essentiel qu'il faut souligner est que même si des symétries sont très brisées, le lagrangien est toujours invariant de jauge.

En pratique la brisure spontanée de symétrie s'obtient au moyen du mécanisme de Higgs[3]. Des multiplets de champs scalaires sont introduits dans la théorie de façon à ce que certaines composantes obtiennent une valeur moyenne dans le vide non nulle. Les masses des bosons et des fermions sont alors proportionnelles aux valeurs moyennes dans le vide des champs scalaires comme le sont les interactions induites par la symétrie, du moins à la limite classique. Nous avons vu dans l'introduction qu'à chaque générateur de symétrie brisée T^a $|0> \neq 0$ était associé un scalaire de masse nulle appelé boson de Goldstone. Contrairement au cas d'une symétrie globale, ce champ scalaire n'est pas un état physique si la symétrie est réalisée localement. Son degré de liberté est en effet absorbé comme état de polarisation longitudinale par le boson vectoriel massif associé au même générateur. Il y a une controverse pour savoir si les autres champs scalaires sont des champs fondamentaux au même titre que les fermions ou les bosons

de jauge, ou s'ils sont des champs scalaires effectifs formés, par exemple, par des états liés fermion-fermion. Dans ce chapitre nous étudierons la brisure de symétrie dans le cadre du mécanisme de Higgs, mais sans présomption sur la réalité physique ou l'origine des champs scalaires.

La structure de la brisure de symétrie d'un groupe G dépend du potentiel de Higgs. Le potentiel de Higgs $V(\Phi)$ est un polynôme invariant sous G, défini sur la representation des champs scalaires R_Φ, et tel que le minimum absolu corresponde à un vecteur Φ_o de R_Φ dont la valeur moyenne dans le vide $<\Phi_o>$ soit non nulle. Le groupe d'invariance de ce vecteur Φ_o, qu'on appelle souvent petit groupe, détermine la symétrie résiduelle après la brisure spontanée du groupe G. Le potentiel a autant de paramètres arbitraires que d'invariants de degré inférieur ou égal à 4 qu'il est possible de former avec la représentation R_Φ. La restriction à un degré 4 est imposée par la renormalisabilité. Les corrections radiatives peuvent introduire des invariants de degré plus élevé mais ceux-ci ont des coefficients finis et calculables. L'approche habituelle pour étudier la brisure spontanée de symétrie d'un groupe de jauge G en un sous-groupe H consiste donc à chercher les représentations $\underline{r}$ de G contenant un vecteur Φ_o admettant H comme petit groupe, puis à écrire à partir de $\underline{r}$ le polynôme le plus général de degré inférieur ou égal à 4 invariant sous G, et enfin à choisir les représentations $\underline{r}$ et les paramètres de façon que le minimum absolu de ce polynôme admette exactement H comme sous-groupe d'invariance.

La réalisation de ce programme dans le cas général est très difficile. Heureusement dans les cas d'intérêt physique rencontrés jusqu'ici, il suffit de considérer les représentations les plus simples, fondamentale et adjointe, pour obtenir la brisure de symétrie recherchée. Par exemple dans le modèle de Weinberg et Salam, la brisure de $SU(2) \times U(1)$ en $U(1)_{em}$ s'obtient en introduisant un doublet de champs scalaires $\Phi \equiv (\varphi^o, \varphi^-)$ et son conjugué Φ^+. Le vide physique étant électriquement neutre, la valeur moyenne dans le vide de Φ doit avoir la forme $<\Phi> = (v,0)$. Se rappelant que $Q = T_3 + Y/2$ on vérifie immédiatement que $T_i <\Phi> \neq 0$ $(i=1,2,3)$, $Y <\Phi> \neq 0$ et $Q <\Phi> = 0$. $<\Phi>$ admet donc bien $U(1)_{em}$ comme petit groupe et trois des quatre degrés de liberté des champs scalaires vont permettre aux

bosons $W^{\pm}$, Z^{o} de devenir massifs. Le photon reste de masse nulle et le quatrième degré de liberté scalaire est un champ physique électriquement neutre. Dans ce cas très simple le potentiel de Higgs n'est fonction que d'un seul invariant, le produit scalaire $\Phi^{+}\Phi$, et la brisure de symétrie ne dépend pas du choix des paramètres.

L'étude de la brisure de symétrie du modèle SU(5) est plus compliquée. Dans ce cas l'introduction de champs scalaires dans la seule représentation fondamentale $\underline{5}+\overline{\underline{5}}$ ne permet pas d'assurer la brisure complète de SU(5) en $SU(3)\times U(1)_{em}$ puisque cette représentation n'admet que SU(4) comme petit groupe. Il faut introduire une autre représentation irréductible pour briser SU(5) en $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$. Si on considère la représentation adjointe de SU(5), on constate qu'elle contient des vecteurs qui admettent comme petits groupes : $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$, $SU(4)\times U(1)$ et tous leurs sous-groupes contenant $U(1)\times U(1)\times U(1)\times U(1)$. Pour s'en rendre compte, il suffit de diagonaliser les matrices 5×5 Φ^{i}_{j}, hermitiques et de trace nulle, sur lesquelles l'action du groupe SU(5) s'écrit :

$$g \in SU(5) \quad , \qquad \Phi \to g\,\Phi\,g^{-1} \tag{III.1.1}$$

On pourrait a priori s'attendre à ce que tous les petits groupes admissibles puissent être réalisés comme minima pour certaines valeurs des paramètres du potentiel de Higgs, qui contient deux invariants de degré 4, $(\mathrm{Tr}\,\Phi^{2})^{2}$ et $\mathrm{Tr}\,\Phi^{4}$. En fait un calcul explicite[23] montre que tout minimum du potentiel de Higgs a nécessairement un petit groupe maximal: $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$ ou $SU(4)\times U(1)$. L. Michel a conjecturé[24] que si le potentiel de Higgs est formé à partir d'une seule représentation irréductible, alors ses minimas ont des petits groupes maximaux. Cette conjecture ne couvre pas la brisure d'un groupe de grande unification G en $SU(3)\times U(1)_{em}$ qui doit être produite par une représentation réductible de champs scalaires. Le cas de SU(5) avec la représentation $\underline{5}+\overline{\underline{5}}+\underline{24}$ peut être traité exactement[25] et on vérifie que la brisure de SU(5) en $SU(3)\times U(1)_{em}$ est réalisée pour un ensemble de valeurs des paramètres du potentiel de Higgs (il y a 5 invariants de degré 4). Cependant les calculs deviennent vite inextricables pour des groupes plus grands que SU(5). En effet plus le rang du groupe G est élevé, plus il faut introduire de représentations

irréductibles de champs scalaires pour le briser en $SU(3) \times U(1)_{em}$.

Une autre limitation des modèles de Higgs concerne le problème de la "hiérarchie" des brisures d'une théorie grand-unifiée. Par exemple, dans le modèle SU(5) seules trois composantes des multiplets de champs scalaires peuvent prendre une valeur moyenne dans le vide non nulle : une composante de la représentation fondamentale et deux composantes de la représentation adjointe (ce sont simplement les composantes dont les charges électriques et de couleur sont nulles). Ces trois valeurs moyennes dans le vide sont en général des paramètres arbitraires. Cependant les masses des quatre bosons de jauge X,Y,W et Z doivent s'exprimer en fonction de ces 3 paramètres. Il existe donc une relation de masse qui s'écrit exactement :

$$M_X = \left[M_Y^2 - \frac{5}{8} M_Z^2\right]^{1/2} + \left[M_W^2 - \frac{5}{8} M_Z^2\right]^{1/2} \qquad \text{(III.1.2)}$$

Les corrections radiatives à cette relation de masse sont finies et calculables. Comme $M_Z/M_Y \sim 10^{-13}$, les masses M_X et M_Y doivent être connues à 10^{-26} près pour vérifier cette relation. Ce fait constitue ce qu'on appelle habituellement le problème de la hiérarchie.

Renormalisation dans une théorie grand-unifiée

L'hypothèse de grande unification consiste à postuler l'existence d'un groupe simple G contenant le groupe $SU(2) \times U(1) \times SU(3)$ afin qu'il n'y ait qu'une seule constante de couplage. Nous avons montré dans l'introduction qu'on pouvait arriver à cette idée en suivant la variation des constantes de couplage associées aux interactions du modèle standard jusqu'à très haute énergie. La validité de cette approche repose sur le théorème de découplage[26]. Ce théorème permet par exemple d'approcher la théorie SU(5) spontanément brisée en plusieurs théories effectives symétriques selon la région d'énergie μ considérée :

$$\begin{array}{lll} SU(5) & \text{si} & \mu \gg M_X \\ SU(3) \times SU(2) \times U(1) & \text{si} & M_W \ll \mu \ll M_X \\ SU(3) \times U(1)_{em} & \text{si} & \mu \ll M_W \end{array} \qquad \text{(III.1.3)}$$

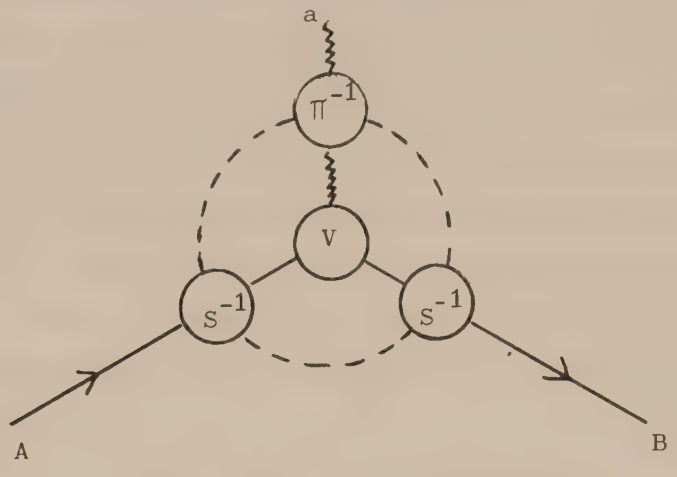
Toutes les particules de masse $M >> \mu$ sont découplées, c'est à dire que leur masse peut être considérée comme infinie. On conçoit aisément que l'utilisation du théorème de découplage dans un région où $\mu \sim M$ induise une erreur. Nous allons exposer brièvement dans cette section comment il est possible de tenir compte des effets de seuil dans une théorie unifiée. L'étude détaillée de cette question fait l'objet de l'article reproduit dans la section (III.2). Il faut souligner que l'incorporation des effets de seuil est importante car l'erreur introduite par l'utilisation du théorème de découplage se traduit par une incertitude appréciable sur des quantités comme le temps de vie du proton.

Il faut adopter une démarche inverse de celle suivie dans l'introduction. Il s'agit, partant du groupe unifié G, de comprendre comment l'unique constante de couplage de la théorie peut donner naissance aux interactions fortes, électromagnétiques et faibles, d'intensités si différentes. Il est clair que ce phénomène doit résulter de la brisure spontanée de la symétrie du groupe G, c'est à dire des différences de masses des bosons de jauge échangés. Les relations entre les constantes de couplage effectives $\alpha_s(\mu)$, $\alpha_W(\mu)$ et $\alpha_{em}(\mu)$ proviennent des priorités de renormalisabilité d'une théorie de jauge spontanément brisée. En effet les contretermes qui rendent une théorie de jauge finie, en théorie de perturbation, dans sa phase symétrique, la rende aussi finie dans une phase spontanément brisée.[27] On sait qu'un contreterme est associé à chaque paramètre arbitraire apparaissant dans le lagrangien. Il va suffire d'imposer une seule condition de renormalisation pour fixer le contreterme associé à l'unique constante de couplage d'une théorie de jauge unifiée. Les diverses constantes de couplage effectives vont alors différer par des termes finis dépendant des masses. Comme une théorie grand-unifiée est brisée à très haute énergie, ces termes finis vont contenir de grands logarithmes quand on choisit le point de renormalisation μ à basse énergie ($\log M_X^2/\mu^2 \sim 60$). Aussi faudra-t-il utiliser le groupe de renormalisation pour faire une resommation.[17]

Il y a plusieurs façons possibles de définir la constante de couplage renormalisée d'une théorie de jauge. Il est préférable de choisir une définition qui soit reliée autant que possible aux données expérimentales. De plus il faut que cette définition respecte les identités de Ward de la théorie spontanément brisée. Pour cela il est commode d'introduire

une charge effective $< f_A W^a f_B >$ entre deux fermions f_A et f_B appartenant à un même multiplet du groupe G et un boson de jauge W^a de masse nulle. On peut en donner la représentation diagrammatique suivante :

$< f_A W^a f_B > \equiv$



(III.1.4)

Les définitions des objets $\Pi_{aa}(p^2)$, $S_A(p^2)$ et $V_{AB}(p^2)$ apparaissant dans ce diagramme sont données dans la section III.2. Les charges effectives s'écrivent de façon générale

$$< f_A W^a f_B > = i R^a(p^2) (T^a)_{AB} \qquad \text{(III.1.5)}$$

où $R^a(p^2)$ est une fonction obtenue en théorie de perturbation à partir des graphes régularisés contribuant à $\Pi_{aa}(p^2)$, $S_A(p^2)$ et $V_{AB}(p^2)$, et T^a représente l'action du générateur du groupe G associé au boson de jauge W^a, sur la représentation irréductible des fermions considérés. Les fonctions $R^a(p^2)$ ne dépendent pas des composantes A et B dans la limite où on néglige la masse de tous les fermions du multiplet. Ceci est une bonne approximation en pratique si on utilise les fermions de la première génération pour définir les constantes de couplage. De la même manière $R^a(p^2)$ ne dépendrait évidemment pas de la composante a dans le cas d'une théorie de jauge non brisée.

La renormalisation des charges effectives est très simple :

$$< f_A W^a f_B >_R = i Z_{g_a}^{-1} R^a(p^2) (T^a)_{AB} \qquad \text{(III.1.6)}$$

La condition de renormalisation au point $p^2 = -\mu^2$ pour fixer le contreterme Z_{g_a} s'écrit simplement

$$< f_A W^a f_B >_R \Big|_{p^2 = -\mu^2} = i (T^a)_{AB} \qquad \text{(III.1.7)}$$

et

$$Z_{g_a}(\mu, \varepsilon, \lambda, g_a(\mu)) = R^a(\mu, \varepsilon, \lambda, g_a(\mu)) \qquad \text{(III.1.8)}$$

où $\lambda = M^2/\mu^2$ est une variable qui désigne collectivement tous les paramètres de masse de la théorie et $\varepsilon = (4 - n)/2$ (si on utilise la régularisation dimensionnelle). La constante de couplage effective $g_a(\mu)$ associé au boson de jauge W^a satisfait l'équation du groupe de renormalisation

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} g_a(\mu) = \beta_a(g_a) \qquad \text{(III.1.9)}$$

avec

$$\beta_a(g_a) = g_a \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} \operatorname{Log} R^a(\mu, \varepsilon, \lambda, g_a) \qquad \text{(III.1.10)}$$

qui exprime que le paramètre de couplage du lagrangien $g_o = Z_{g_a}^{-1} g_a$ ne dépend pas de μ. La forme simple de l'équation (III.1.9) n'est valable que dans la jauge de Landau, où il n'y a pas de variation du paramètre de jauge avec μ, et si l'on renormalise sur la couche de masse des particules.

Les fonction β_a dépendent des masses $\lambda_i = M_i^2/\mu^2$. A l'ordre d'une boucle les fonctions β_a peuvent s'exprimer dans n'importe quelle théorie de jauge spontanément brisée comme une combinaison linéaire de dérivées logarithmiques $(\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2})$ de 4 fonctions de seuil indépendantes $\Phi(\lambda_1, \lambda_2)$, $A(\lambda_1, \lambda_2)$, $B(\lambda_1, \lambda_2)$ et $C(\lambda_1, \lambda_2)$. Les expressions analytiques de ces fonctions sont données dans la section (III.2) ainsi que les graphes dont elles représentent la contribution aux charges effectives $R^a(\mu^2)$. Les fonctions β_a ont des limites bien définies pour $\lambda_i \to \infty$ et $\lambda_i \to 0$. On peut voir explicitement comment s'opère le découplage des particules massives. Le comportement

typique des fonctions β_a lors de la traversée d'un seuil est celle d'une fonction θ lisse dont la largeur de transition, centrée autour de M, est environ $10^{\pm 1}$M. On a ainsi une mesure de l'ambiguité inhérente à toute méthode dans laquelle le découplage des particules massives n'est pas manifeste.

Tout groupe grand-unifié G doit être spontanément brisé en $SU(3) \times U(1)_{em}$. On peut utiliser la méthode décrite ci-dessus pour définir les constantes de couplage effectives $\alpha_s(\mu)$ et $\alpha_{em}(\mu)$ associées respectivement aux sous-groupes SU(3) et $U(1)_{em}$. L'unicité de la constante de couplage du groupe G va alors se traduire par la condition asymptotique

$$\lim_{\mu \to \infty} \alpha_s(\mu) = \lim_{\mu \to \infty} \frac{3}{8} \alpha_{em}(\mu) \qquad \text{(III.1.11)}$$

(la constante de normalisation 3/8 est commune à tout modèle grand-unifié réaliste). Le raccordement des constantes de couplage se fait à l'infini car c'est seulement dans cette limite que la théorie grand-unifiée est symétrique. La relation entre $\alpha_s(\mu)$ et $\alpha_{em}(\mu)$ à toute énergie μ s'obtient en prenant la solution de l'équation (III.1.9) :

$$\frac{4\pi}{\alpha_s(\mu)} - \frac{3}{8}\frac{4\pi}{\alpha_{em}(\mu)} = \int_{\mu^2}^{\infty} \frac{dx}{x}\left[\frac{\beta_{em}(\alpha_{em},\lambda)}{\left[\frac{8}{3}\alpha_{em}(x)\right]^2} - \frac{\beta_s(\alpha_s,\lambda)}{\alpha_s^2(x)}\right] \qquad \text{(III.1.12)}$$

A l'ordre d'une boucle, on obtient la formule suivante qui est valable pour une théorie grand-unifiée basée sur un groupe G quelconque, quelle que soit la structure de la brisure de symétrie en $SU(3) \times U(1)_{em}$, dès que celle-ci est déterminée à l'approximation classique (ce qui n'est pas toujours simple) :

$$\begin{aligned}\frac{4\pi}{\alpha_s(\mu)} - \frac{3}{8}\frac{4\pi}{\alpha_{em}(\mu)} &= 2\sum_{W_n}\left[\frac{3}{8} d_{W_n} Q^2(W_n) - T(W_n)\right]\left[\Phi(\lambda_{W_n},\lambda_{W_n}) + A(\lambda_{W_n},0)\right] \\ &+ 2\sum_{\Phi_n}\left[\frac{3}{8} d_{\Phi_n} Q^2(\Phi_n) - T(\Phi_n)\right] B(\lambda_{\Phi_n},\lambda_{\Phi_n}) \qquad \text{(III.1.13)} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{f_n}\left[\frac{3}{8} d_{f_n} Q^2(f_n) - T(f_n)\right] C(\lambda_{f_n},\lambda_{f_n})\end{aligned}$$

La sommation doit être faite sur toutes les composantes irréductibles r_n qui apparaissent dans la décomposition par rapport à SU(3) des représentations de G pour les bosons de jauge W, les Higgs Φ et les fermions f. $Q(r_n)$ et $T(r_n)$ désignent respectivement la valeur de la charge électrique et la normalisation des générateurs de SU(3) dans la représentation r_n, et d_{r_n} est la dimension de la représentation r_n (en général 1,3 ou 8). Enfin $\lambda_{r_n} = M^2/\mu^2$ où M est la masse de la particule dans la représentation r_n.

Il suffit de considérer les particules massives car on peut toujours normaliser les fonctions A,B,C et Φ à zéro dans la limite symétrique $\lambda = 0$. Le comportement de ces fonctions quand $\lambda \to 0$ et $\lambda \to \infty$ s'écrit de façon générale

$$F(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda) \quad \lambda \to 0 \ ;$$

$$F(\lambda) = c_1 \operatorname{Log} \lambda + c_2 + \mathcal{O}(1/\lambda) \quad \lambda \to \infty \qquad \text{(III.1.14)}$$

En pratique quand on est loin d'un seuil, il suffit de retenir le terme logarithmique et le terme constant. Négliger le terme constant reviendrait grosso modo à faire l'approximation θ. Par contre on peut utiliser le théorème de découplage pour évaluer les effets de deux boucles car cela n'introduit qu'une ambiguité de 2 à 3%.

Il suffit d'inverser l'équation (III.1.13) pour obtenir la masse M_X d'un boson de jauge superlourd en fonction des constantes de couplage $\alpha_s(\mu)$, $\alpha_{em}(\mu)$ et des rapports de masse $\tau_i = M_i/M_X$ du modèle considéré

$$M_X = f(\mu, \alpha_s(\mu), \alpha_{em}(\mu), \tau_i) \qquad \text{(III.1.15)}$$

L'expression de M_X dans le modèle SU(5) est donnée dans la section III.2.

Le problème de la définition de $\sin^2 \theta_W(\mu)$ dans une théorie grand-unifiée doit faire l'objet d'une attention particulière. En effet la prédiction théorique dépend de la définition quand on tient compte de la brisure de $SU(2) \times U(1)$. Ce problème n'apparaissait pas dans les travaux antérieurs

car ils négligeaient cette brisure dans l'étude de SU(5). En fait il existe une définition de $\sin^2\theta_W$ qui est directement reliée au mélange A - Z. En effet si A et Z sont des combinaisons orthogonales à l'approximation classique ($\sin^2\theta_o = 3/8$), les corrections radiatives produisent un mélange et les charges effectives de A et Z vont s'écrire :

$$\begin{bmatrix} f\,A\,f \\ f\,Z\,f \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} R_{AA}(p^2) & R_{AZ}(p^2) \\ R_{AZ}(p^2) & R_{ZZ}(p^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (T^A)_{ff} \\ (T^Z)_{ff} \end{bmatrix} \qquad \text{(III.1.16)}$$

Les générateurs normalisés de A et Z dans SU(5) s'écrivent

$$T^A = \sqrt{\frac{3}{8}}\, Q \quad ; \quad T^Z = \sqrt{\frac{8}{5}}\,(T_3 - \frac{3}{8} Q) \qquad \text{(III.1.17)}$$

Cependant le photon correspond à un générateur d'un sous-groupe $U(1)_{em}$ non brisé de SU(5). La condition de renormalisation au point $p^2 = -\mu^2$ pour fixer le contreterme Z_{g_A} associé à la constante de couplage électromagnétique est simplement

$$\langle f\,A\,f \rangle_R \Big|_{p^2 = -\mu} = i\sqrt{\frac{3}{8}}\, Q_F \qquad \text{(III.1.18)}$$

Il faut donc faire une rotation finie $R(\theta - \theta_o)$ sur le système (A - Z) pour satisfaire la condition (III.1.18) :

$$\begin{bmatrix} f\,A\,f \\ f\,Z\,f \end{bmatrix}_R = Z_{g_A}^{-1} R(\theta - \theta_o) \begin{bmatrix} f\,A\,f \\ f\,Z\,f \end{bmatrix} \qquad \text{(III.1.19)}$$

On peut ainsi définir un angle $\theta_{\gamma Z}(\mu)$ de façon à paramétriser la charge effective renormalisée du courant neutre de manière habituelle

$$\langle f\,Z\,f \rangle_R = i\, Z_{g_A}^{-1}\, R_Z(p^2) \times \sqrt{\frac{8}{5}} \left[T_{3_f} - \sin^2\theta_{\gamma Z}\, Q_f\right] \qquad \text{(III.1.20)}$$

L'expression explicite de $\sin^2\theta_{\gamma Z}(\mu)$ a l'ordre d'une boucle est donnée dans la section III.2.

Temps de vie du proton et valeur de $\sin^2\theta_W(\mu)$ dans SU(5)

Le calcul du temps de vie du proton peut être séparé en trois étapes :

i) le calcul de la masse M_X des bosons vecteurs médiateurs de la désintégration du proton.

ii) la détermination du lagrangien effectif responsable des processus violant le nombre baryonique.

iii) le calcul des éléments de matrice correspondants aux différents modes de désintégration.

La première étape est réalisée dans l'article reproduit ci-après Tenant compte de toutes les incertitudes, la valeur de la masse M_X s'écrit dans le modèle SU(5) :

$$M_X = 3.1 \left(\frac{\Lambda_{\overline{MS}}}{0.2}\right)^{1.03} 10^{14 \pm 0.25 - 0.2(N_H - 1) + 0.1(N_F - 3)} \text{ GeV} \qquad \text{(III.1.21)}$$

$\Lambda_{\overline{MS}}$ est le paramètre de la chromodynamique quantique qui paramétrise la constante de couplage forte $\alpha_s(Q^2)$ définie dans le schéma de renormalisation dit de "soustraction minimale". La détermination expérimentale de $\Lambda_{\overline{MS}}$ a longtemps présenté de grandes incertitudes. La valeur de $\Lambda_{\overline{MS}}$ semble maintenant stabilisée autour de .20 GeV :

$$\Lambda_{\overline{MS}} = 0.20 \pm 0.05 \text{ GeV} \qquad \text{(III.1.22)}$$

L'incertitude $\pm$ 0.25 dans la formule (III.1.21) provient principalement du fait que la masse des champs de Higgs superlourds est inconnue dans une large mesure : $10^{-3} \leq M_H/M_X \leq 10^{+3}$. La valeur centrale $M_X^c = 3.1\ 10^{14}$ GeV correspond au choix $M_H = M_X$ et la dépendance de M_X en fonction du rapport M_H/M_X est donnée par

$$M_X = M_X^c \left(\frac{M_H}{M_X}\right)^{-4/67} \qquad \text{(III.1.23)}$$

Enfin, toujours dans la formule (III.1.21), N_H est le nombre de doublets de champs de Higgs légers et N_F est le nombre de familles de fermions . L'incertitude totale sur la valeur de M_X est donc, grosso modo, d'un facteur 2.

La détermination du lagrangien effectif responsable des processus violant le nombre baryonique doit incorporer les effets d'amplification à courte distance prenant en compte le fait que l'échelle de la désintégration du proton est d'ordre $M_p \sim 1$ GeV et non pas M_X. La correction due à la brisure de SU(5) a été calculée par différents auteurs[28] en utilisant le groupe de renormalisation, à l'ordre d'une boucle et en négligeant les effets de seuil. L'effet d'amplification s'avère être important (un facteur $A \sim 3.4$ dans l'amplitude de désintégration).

La troisième étape comporte plus d'incertitudes. En effet les valeurs des éléments de matrice du lagrangien effectif entre le proton et les différents états finals lepton + mésons dépendent de la probabilité qu'ont deux quarks du nucléon de s'annihiler. Cette probabilité dépend de la fonction d'onde utilisée. Deux méthodes sont généralement considérées. La première consiste à traiter les quarks de manière non relativiste[29], la deuxième utilise un modèle de sacs[30]. Chacune a ses inconvénients. Combinant les différentes estimations on peut écrire le temps de vie du proton dans le modèle SU(5) sous la forme

$$\tau_p = 3\times 10^{29 \pm 2 - 0.8(N_H - 1) + 0.4(N_F - 3)} \left[\frac{\Lambda_{\overline{MS}}}{0.2}\right]^{4.1} \text{ans} \qquad \text{(III.1.24)}$$

La limite expérimentale actuelle sur τ_p est $\tau_p^{exp} > 2.10^{30}$ ans, ce qui est compatible avec (III.1.24). Si les évènements annoncés à la Conférence de Paris[31] sont confirmés , alors on aurait $\tau_p \sim 7 \times 10^{30}$ ans, en accord avec la prédiction de SU(5). Une valeur $\tau_p > 10^{31}$ ans serait difficilement réconciliable avec un modèle SU(5) minimal.

Un calcul correct de la valeur $\sin^2\theta_W(\mu)$ dans SU(5) doit prendre en compte la brisure de $SU(2)\times U(1)$. Le formalisme exposé au paragraphe

précédent et développé dans la section suivante permet de définir $\sin^2\theta_W$ de façon à paramétriser le courant neutre de manière habituelle. Sa valeur, qui varie avec l'énergie μ, s'accroît notablement pour $\mu < M_W$. $\sin^2\theta_W(\mu)$ peut être défini même à $\mu = 0$ ce qui est très utile pour la comparaison avec les expériences sur la violation de la parité en physique atomique. On peut résumer la prédiction de SU(5) pour $\sin^2\theta_W(\mu)$ quand $\mu < M_W$ par la formule[32] :

$$\sin^2\theta_W(\mu) = \frac{3}{8} - 21.076\ \alpha^D_{em}(\mu) + 0.004(N_H - 1) - 0.0014(N_F - 3) - 0.0056\ \mathrm{Log}\frac{\Lambda_{\overline{MS}}}{0.2} \pm 0.001 \qquad \text{(III.1.25)}$$

$\alpha^D_{em}(\mu)$ est la constante de couplage électromagnétique que l'on peut obtenir à partir de la section efficace totale d'annihilation e^+e^- par une relation de dispersion. Les autres notations ont été introduites précédemment. L'incertitude résiduelle $\pm$ 0.001 vient des paramètres de masse arbitraires dans le modèle SU(5). En particulier on obtient $\sin^2\theta_W(0) = 0.221$ et $\sin^2\theta_W(20\ \mathrm{GeV}) = 0.216$ quand $\Lambda_{\overline{MS}} = 0.2$ GeV. Mais avant toute comparaison avec les valeurs expérimentales $\sin^2\theta_W^{exp}$, d'autres corrections radiatives doivent être prises en compte, qui dépendent du processus considéré. Ces corrections radiatives supplémentaires ont été calculées par Marciano et Sirlin[33] pour plusieurs expériences de courant neutre. Ils ont ainsi pu extraire une valeur effective de $\sin^2\theta_W^{exp}$ à $\mu = 20$ GeV qui peut directement être comparée avec la prédiction de SU(5). Leur valeur $\sin^2\theta_W(20\ \mathrm{GeV}) = 0.216 \pm 0.010$ est en plein accord avec la formule (III.1.25) quand $\Lambda_{\overline{MS}} = 0.20$ GeV .

Nuclear Physics B198 (1982), 317-364.

SYMMETRY-BREAKING EFFECTS IN GRAND UNIFIED THEORIES

I. Antoniadis, C. Kounnas and C. Roiesnel

Nuclear Physics B198 (1982) 317–364
© North-Holland Publishing Company

SYMMETRY-BREAKING EFFECTS IN GRAND UNIFIED THEORIES

I. ANTONIADIS, C. KOUNNAS[1] and C. ROIESNEL

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex, France

Received 2 November 1981

We study the threshold effects in a spontaneously broken gauge theory. In particular we present a computation of the symmetry-breaking effects in the SU(5) grand unified theory including those of the breaking of $SU(2)\times U(1)$. As an application we give a precise value of the superheavy gauge boson mass M_X. We also show that it is possible in SU(5) to define a natural effective weak angle $\theta_w(\mu)$ for any scale μ, below as well as above M_W, and we give the predicted curve for $\sin^2\theta_w(\mu)$.

1. Introduction

The known interactions seem to be described by QCD and the Weinberg–Salam (WS) model which both are gauge theories. It is therefore natural to base grand unification [1, 2] on a simple gauge group $G \supset SU(3)_c \times [SU(2)\times U(1)]_{WS}$ in order that there be a single coupling constant. However the forces associated to the strong, weak and electromagnetic interactions are of vastly different strengths. The central idea [3] behind grand unification is that the splitting of the unique coupling constant of the group G arises from the difference of the masses of the gauge particles resulting from the spontaneous breaking of G.

In grand unified theories, very heavy particles must exist in order to get the observed splitting between the strong and electromagnetic coupling constants. If no new physics interferes drastically with the known interactions, the mass scale of the heavy particles must be as high as 10^{14}–10^{15} GeV. It is perhaps not a coincidence that attempts of quark-lepton unification call for such a mass scale in order to ensure proton stability. The weak angle θ_w, which measures the splitting between the SU(2) coupling constant and the electromagnetic one, is then predicted to be $\sin^2\theta_w \sim 0.20$ [3], which is very close to the experimental values. There are very few practical and significant low-energy tests of grand unified theories so, considerable effort [4–13] has been devoted to estimate, more reliably, $\sin^2\theta_w$ and the leptoquark mass M_X on which the proton lifetime, $\tau_p \sim M_X^4$, is strongly dependent. Our paper is concerned with these estimations for the minimal group G = SU(5) and gives a detailed account of results presented briefly elsewhere [14].

[1] Laboratoire de Physique Théorique de l'Ecole Normale Supérieure, 75231 Paris Cedex 05, France.

To get the desired precision, we need to go beyond the leading logarithmic approximation of refs. [3, 4] in which threshold effects are crudely approximated by θ functions. This procedure for treating the decoupling of heavy particles is validated by the decoupling theorem [15, 16]. However, this approximation can only give a rough order of magnitude of M_X. A refined evaluation of threshold effects and second-order corrections is highly dependent on the renormalization prescription. A systematic second-order calculation has been performed with a momentum subtraction (MOM) prescription for an SU(5) grand unified theory by Goldman and Ross [6]. However, their attack of the problem had to rely upon numerical integration of complicated coupled equations which contain the threshold effects explicitly. Other strategies [8, 17] avoid mass-dependent β functions by using a modified minimal subtraction scheme. Weinberg's technique [8] relates the minimal subtraction coupling constant of effective gauge theories constructed from a grand unified theory by integrating out the superheavy fields. Weinberg's formulae have been used by Hall [9] and by Ellis et al. [10] to compute M_X and $\sin^2\theta_w$ in grand unified theories principally based on SU(5). Related prescriptions have been formulated by Binétruy and Schücker [11] and by Chang et al. [12]. All these strategies rely on the decoupling theorem to distinguish the regions above and below a threshold M. The matching between the two regions typically neglects terms of order μ^2/M^2 so it is expected to be valid for energies μ small compared to M, in particular for the crossing of the superheavy threshold in grand unified theories. However, some care may be needed for crossing the (WS) threshold.

The crossing of thresholds can be done exactly using the formulation of ref. [18]. We apply their method to give a unified picture of the evolution of the running coupling constants over the whole range of energy, whatever the number of mass scales, because the matching is done at infinity. The β functions have well-defined limits for $M^2 \to 0$ and $M^2 \to \infty$ and we can see the splitting of the unique coupling constant of the theory and how the decoupling of heavy particles takes place. Related proposals have been made in refs. [13, 19, 20]. In this paper we use the Landau gauge where there is no running gauge parameter and get closed analytical expressions for the evolution of coupling constants with all mass effects taken into account exactly up to one loop level. Second-order effects are evaluated in the step approximation with a careful estimation of errors involved in that procedure. As an application, we calculate M_X in SU(5) and our value agrees with previous estimations [9–13]. Although we study the specific example of SU(5) our results are presented in such a way that they can be extended easily to any grand unified gauge group.

We also devote special attention to the problem of defining $\sin^2\theta_w$ in SU(5). The symmetric value $\sin^2\theta_w = \frac{3}{8}$ is modified by renormalization effects to $\sin^2\theta_w = 0.2$ at ordinary energies [3]. In general the effective value of $\sin^2\theta_w(\mu)$ is calculated at the scale $\mu = M_W$ assuming that the $SU(2) \times U(1)$ gauge symmetry is unbroken. In our scheme we can relax this assumption and define $\sin^2\theta_w(\mu)$ below the W

threshold. However, for $\mu \leqslant M_W$ the prediction will depend on the definition, and the question of relating the theoretical value to the experimental one becomes important. A possible definition would be $\sin^2 \theta_w(\mu) = \alpha_{em}(\mu)/\alpha_w(\mu)$, where α_w measures the strength of the weak charged current. But there is a more natural definition with respect to neutral current experiments. Indeed we find that it is possible to define a neutral current effective charge whose parametrization is exactly that of the tree level:

$$Q_Z = \frac{1}{\cos \theta_w(\mu)} [T_3 - \sin^2 \theta_w(\mu) Q_{em}] .$$

This angle $\sin^2 \theta_w(\mu)$ is related to the non-trivial γ-Z mixing which arises in the SU(5) symmetric γ-Z basis at the scale μ. It turns out that both definitions give very similar results below the W threshold, in particular our prediction at $\mu = M_W$, $\sin^2 \theta_w(M_W)$, is in agreement with previous results [7, 9–13]. But the value $\sin^2 \theta_w(\mu)$ does increase when $\mu < M_W$ and this increase which is due to the WS breaking, is quite large. This correction is very important because now the corrected value of $\sin^2 \theta_w$, with the uncertainties due to the strong coupling constant determination, overlaps the experimental values. Similar corrections have also been found in refs. [19, 21, 22, 24]. However, we must stress here that our paper is only concerned with the radiative corrections controlled by the renormalization group. Radiative corrections contain another part consisting in the contribution of box diagrams and bremsstrahlung terms, which is μ independent but experiment dependent and which must be evaluated before being compared to our prediction. This part has been recently calculated by several authors [23, 25] in the Weinberg–Salam model.

The paper is organized as follows: In sect. 2, we recall some well-known facts about the breaking of SU(5) down to $SU(3)_c \times U(1)$ so as to make this paper self-contained. We present, in sect. 3, our renormalization scheme with special emphasis on the photon-Z^0 mixing. In sect. 4 we describe how to relate the observed strengths of the three interactions at low energy. In sect. 5 we study the threshold functions at the one-loop level and consider how the decoupling operates in the Landau gauge. We discuss the second-order effects in sect. 6. In sect. 7 we apply our formulae for the evolution of the running coupling constants to calculate M_X in SU(5). We also show how to translate the experimental data on α_{em} and α_s into our renormalization scheme. In sect. 8 we calculate $\sin^2 \theta_w(\mu)$ over the whole range of energy scale μ and compare the predictions of several possible theoretical definitions below the W threshold. Finally in sect. 9 we summarize our results and compare with other authors. Appendices A and B contain some technical details and in appendix B we list all the analytic expressions for the threshold functions.

2. Mass spectrum in a spontaneously broken theory [SU(5)]

Given a gauge group G with the vector gauge bosons assigned to the adjoint representation, we first need to specify the irreducible representations which

accommodate the fermions. Then we must break G into $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ with some set of Higgs representations which depends on the desired symmetry breaking pattern. Since the Weinberg–Salam model describes the weak and electromagnetic interactions at low energies, it is useful to write down the $SU(3)_c \times SU(2)_L$ decomposition of all these irreducible representations.

For instance, in the case of $G = SU(5)$, it is well known [2] that we need to introduce a $\bar{5}$-plet and 10-plet for each generation of left-handed fermions. It is also well known [4] that the minimal Higgs system which gives the breakings $SU(5) \to SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1) \to SU(3)_c \times U(1)_{em}$ consists of a 24-plet and a complex 5-plet.

The $SU(3)_c \times SU(2)_L$ decomposition of the 24-plet gauge bosons is

$$\begin{aligned} 24 &= (8,1) \oplus (3,2) \oplus (\bar{3},2) \oplus (1,3) \oplus (1,1)\,, \\ W &= (G_{ij}) \oplus (X_i, Y_i) \oplus (Y_i^+, X_i^+) \oplus (W^+, W^3, W^-) \oplus (B^0)\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

The octets (G_{ij}) are identified with the gluons which belong to the adjoint representation of $SU(3)_c$ and are singlet of $SU(2)_L$. The labels i and j stand for the three SU(3) colors. The SU(2) doublets (X_i, Y_i) and (Y_i^+, X_i^+) represent the superheavy vector bosons X and Y; X_i and Y_i are also triplets in $SU(3)_c$. The SU(2) triplet (W^+, W^3, W^-), which is $SU(3)_c$ singlet, represents the WS SU(2) vector bosons. Finally (B^0), which is $SU(3)_c$ and $SU(2)_L$ singlet, represents the WS U(1) vector boson.

In the same way the 24-plet of Higgs is decomposed as

$$\phi = (\phi_{G_{ij}}) \oplus (\phi_{X_i}, \phi_{Y_i}) \oplus (\phi_{Y_i}^+, \phi_{X_i}^+) \oplus (\phi_W^+, \phi_{23}, \phi_W^-) \oplus (\phi_{24})\,. \tag{2.2}$$

The 5-plet Higgs decomposition is,

$$\begin{aligned} 5 &= (3,1) \oplus (1,2)\,, \\ H &= (H_{Y_i}) \oplus (H_W^+, H^0)\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

(H_{Y_i}) is $SU(3)_c$ triplet and $SU(2)_L$ singlet. The $SU(2)_L$ doublet (H_W^+, H^0) is also singlet under $SU(3)_c$. The H^0 Higgs is usually parametrized as $H^0 = \sqrt{\frac{1}{2}}[R_5 - iI_5]$, where R_5 and I_5 are real fields.

The $\bar{5}$-plet of left-handed fermions is decomposed as

$$\begin{aligned} \bar{5} &= (\bar{3},1) \oplus (1,2)\,, \\ \chi &= (d_i^c)_L \oplus (\nu, e)_L\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

d_L^c represents the left-handed charge conjugate d-quark which is triplet under $SU(3)_c$ and singlet under $SU(2)_L$. The $SU(2)_L$ doublet and $SU(3)_c$ singlet, represent the neutrino and the left-handed electron.

Finally the decomposition of the 10-plet fermions is

$$\begin{aligned} 10 &= (\bar{3}, 1)\oplus(3, 2)\oplus(1, 1)\,, \\ \psi &= (u_i^c)_L\oplus(u_i, d_i)_L\oplus(e^c)_L\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

which contains the $SU(3)_c$ triplet u charge conjugate left-handed quark, the $(u_i, d_i)_L$ $SU(2)_L$ doublet (triplet under $SU(3)_c$) and the singlet charge conjugate left-handed electron.

The SU(5) symmetric lagrangian is:

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = &-\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi}\,\mathrm{Tr}\,[\partial W + ig\xi[\phi, V] + ig\xi(HV_0^+ - V_0H^+)]^2 \\ &+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\bar{\eta}\partial\cdot D\eta + (D_\mu H)^+(D^\mu H) + \mathrm{Tr}\,(D_\mu\phi)^2 + \bar{\chi}^+ i\not{D}\chi + \mathrm{Tr}\,\bar{\psi} i\not{D}\psi \\ &+\nu^2(H^+H) - \tfrac{1}{2}\lambda(H^+H)^2 + \mu^2\,\mathrm{Tr}\,\phi^2 - \tfrac{1}{2}\lambda_1(\mathrm{Tr}\,\phi^2)^2 - \lambda_2\,\mathrm{Tr}\,\phi^4 \\ &-2\beta H^+\phi^2 H - 2\alpha\,\mathrm{Tr}\,\phi^2(H^+H) - (\rho\varepsilon_{ijklm}\bar{\psi}^c_{ij}H_k\psi_{lm} + \delta\bar{\chi}_i H_j\psi^c_{ij} + \mathrm{h.c.})\,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

The first line represents the pure gauge theory with the gauge-fixing term and the ghosts, then we have the kinetic energy terms of the scalar Higgs H and ϕ and of the fermions χ and ψ as well as their gauge interaction through their covariant derivatives

$$\begin{aligned} D_\mu H &= \partial_\mu - igW_\mu H\,, \\ D_\mu\psi &= \partial_\mu - ig(W\psi + \psi W^\perp)\,, \\ D_\mu\chi &= \partial_\mu + igW^\perp\chi\,, \\ D_\mu\phi &= \partial_\mu - ig[W_\mu, \phi]\,, \end{aligned} \tag{2.7a}$$

and the strength $F^{\mu\nu}$ is

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu - ig[W^\mu, W^\nu]\,. \tag{2.7b}$$

The remaining terms represent the Higgs potential and the two possible Yukawa couplings of H with the fermions.

After spontaneous symmetry breaking which occurs via the Higgs field translations $\phi\to\phi - V$ and $H\to H - V_0$, some of the particles get masses and some of them remain massless. The vacuum expectation values $V = \langle\phi\rangle$ and $V_0 = \langle H\rangle$ are chosen to be [4]

$$V = v\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\varepsilon & & \\ & & & & -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\varepsilon & \end{bmatrix}, \qquad v\sim O(10^{15}\ \mathrm{GeV})\,, \tag{2.8}$$

$$V_0 = v_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad v_0 \sim O(10^2\ \mathrm{GeV}), \qquad \varepsilon \sim O\left(\frac{v_0^2}{v^2}\right). \tag{2.9}$$

Let us now examine the mass spectrum [4, 25] of the charged particles in the 't Hooft–Landau gauge ($\xi \to 0$). The choice of this particular gauge will be transparent in the following sections.

2.1. GAUGE VECTOR BOSONS

(1) Eight massless and neutral gluons:

$$M_G = 0, \qquad Q_G = 0. \tag{2.10}$$

(2) Twelve charged superheavy vector bosons $X_i^{\pm}$, $Y_i^{\pm}$ with

$$M_X^2 = \tfrac{1}{4}(5+\varepsilon)^2 g^2 v^2, \qquad M_Y^2 = \tfrac{1}{4}(5-\varepsilon)^2 g^2 v^2 + \tfrac{1}{2} g^2 v_0^2, \tag{2.11a}$$

$$Q_{X^{\pm}} = \pm\tfrac{4}{3}, \qquad Q_{Y^{\pm}} = \pm\tfrac{1}{3}. \tag{2.11b}$$

(3) Two charged massive $W^{\pm}$ vector bosons:

$$M_W^2 = \tfrac{1}{2} g^2 v_0^2 + \varepsilon^2 g^2 v^2, \qquad Q_{W^{\pm}} = \pm 1. \tag{2.12}$$

(4) Two neutral vector bosons, one massive (Z) and one massless, the photon (A). These two neutral particles are related with the non-physical W_3 and B^0 as

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \sin\theta_0 \\ -\sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3 \\ B^0 \end{pmatrix}, \qquad \text{with } \sin\theta_0 = \sqrt{\tfrac{3}{8}}, \tag{2.13a}$$

$$M_A^2 = 0, \qquad M_Z^2 = \tfrac{8}{5}\tfrac{1}{2} g^2 v_0^2, \qquad Q_A = Q_Z = 0. \tag{2.13b}$$

Between the M_X, M_Y, M_W and M_Z there exists the relation

$$M_X = \sqrt{M_Y^2 - \tfrac{5}{8} M_Z^2} + \sqrt{M_W^2 - \tfrac{5}{8} M_Z^2}. \tag{2.14}$$

2.2. SCALAR HIGGS BOSONS

(1) Eight neutral superheavy scalar Higgs corresponding to the massless gluons, ϕ_G:

$$M_8 = \tfrac{1}{2}\lambda_2 v^2 (5+\varepsilon)(1-\varepsilon), \qquad Q_8 = 0. \tag{2.15}$$

(2) Twelve massless charged Goldstone bosons associated to $X_i^{\pm}$ and $Y_i^{\pm}$:

$$\begin{aligned} &\phi_{X_i}^{\pm} \quad \text{and} \quad \tilde{\phi}_{Y_i}^{\pm} = \phi_Y^{\pm} \cos\varphi_Y - H^{\pm} \sin\varphi_Y, \\ &M_{\phi_X} = M_{\tilde{\phi}_Y} = 0, \end{aligned} \tag{2.16a}$$

where φ_Y is a mixing angle between the two Higgs

$$\sin\varphi_Y = \sqrt{\frac{5}{8}}\frac{M_Z}{M_Y}. \tag{2.16b}$$

(3) Six charged superheavy Higgs $\tilde{H}^{\pm}_{Y_i}$ which form the remaining orthogonal combination of ϕ_{Y_i} and H_{Y_i}:

$$\tilde{H}^{\pm}_{Y_i} = H^{\pm}_{Y_i}\cos\varphi_Y + \phi^{\pm}_{Y_i}\sin\varphi_Y,$$

with

$$M_3^2 = -\tfrac{5}{2}\beta v^2(1-\varepsilon)\left[1-\frac{\varepsilon}{5}+\frac{2}{5}\frac{v_0^2}{v^2}\frac{1}{5-\varepsilon}\right]. \tag{2.17}$$

(4) Two charged massless Goldstone bosons associated to $W^{\pm}$, $\tilde{H}^{\pm}_W$:

$$\tilde{H}^{\pm}_W = H^{\pm}_W\cos\varphi_W - \phi^{\pm}_W\sin\varphi_W,$$

with

$$\cos\varphi_W = \sqrt{\frac{5}{8}}\frac{M_Z}{M_W}, \qquad M_{\tilde{H}_W} = 0. \tag{2.18}$$

(5) The remaining orthogonal combination of $\phi^{\pm}_W$ and $H^{\pm}_W$, $\tilde{\phi}^{\pm}_W$ gets a superheavy mass M_4

$$\tilde{\phi}^{\pm}_W = \phi^{\pm}_W\cos\varphi_W + H^{\pm}_W\sin\varphi_W,$$

with

$$M_4^2 = 3\beta\left[\frac{v_0^2}{\varepsilon}+2\varepsilon v^2\right]. \tag{2.19}$$

(6) One neutral and massless Goldstone boson I_5 corresponding to the Z gauge boson

$$M_{I_5} = 0. \tag{2.20}$$

(7) Three massive neutral bosons; two of them are superheavy $\tilde{\phi}_{24}$, $\tilde{\phi}_{23}$ and the other one $\tilde{R}_5$ has a light mass M_5:

$$\tilde{R}_5 \to M_5^2 = v_0^2\left[2\lambda - \frac{9}{5}\frac{\beta^2}{\lambda_2} - \frac{6}{5}\frac{(10\alpha+3\beta)^2}{15\lambda_1+7\lambda_2}\right] + O\left(\frac{v_0^4}{v^2}\right), \tag{2.21a}$$

$$\tilde{\phi}_{24} \to M_{24}^2 = (15\lambda_1+7\lambda_2)v^2 + O(v_0^2), \tag{2.21b}$$

$$\tilde{\phi}_{23} \to M_{23}^2 = 10\lambda_2 v^2 + O(v_0^2). \tag{2.21c}$$

These three physical scalar bosons are related via three mixing angles with the R_5,

ϕ_{23} and ϕ_{24} fields:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\phi}_{24} \\ \tilde{\phi}_{23} \\ \tilde{R}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\phi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \sin\phi\sin\theta & -\cos\phi\sin\psi - \cos\theta\cos\psi\sin\phi \\ \sin\theta\sin\psi & \cos\theta & -\sin\theta\cos\psi \\ \sin\phi\cos\psi + \cos\theta\sin\psi\cos\phi & -\cos\phi\sin\theta & -\sin\psi\sin\phi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \phi_{24} \\ \phi_{23} \\ R_5 \end{pmatrix}, \tag{2.22a}$$

with

$$\sin\theta = \frac{3}{5\sqrt{2}}\frac{\beta}{\lambda_2}\frac{v_0}{v} + O\left(\frac{v_0^3}{v^3}\right),$$

$$\sin\psi = \frac{1}{3\sqrt{30}}\frac{v_0}{v}\frac{6(10\alpha+3\beta)-(17\lambda_2+15\lambda_1)}{(\lambda_2-\lambda_1)} + O\left(\frac{v_0^3}{v^3}\right), \tag{2.22b}$$

$$\sin\phi = \frac{1}{3\sqrt{30}}\frac{v_0}{v}\frac{(17\lambda_2+15\lambda_1)(7\lambda_2+15\lambda_1)-60\lambda_2(10\alpha+3\beta)}{(7\lambda_2+15\lambda_1)(\lambda_2-5\lambda_1)} + O\left(\frac{v_0^3}{v^3}\right).$$

2.3. FERMIONS

(1) The d-quark and the electron get the same mass:

$$m_d = m_e = -\frac{\sqrt{10}}{4}\frac{\delta_1}{g}M_Z, \qquad Q_d = -\tfrac{1}{3}, \qquad Q_e = -1. \tag{2.23}$$

(2) The u-quark gets a different mass given as

$$m_u = 2\sqrt{5}\frac{\rho_1}{g}M_Z, \qquad Q_u = \tfrac{2}{3}. \tag{2.24}$$

Analogous relations are valid for every family:

$$m_s = m_\mu = -\frac{\sqrt{10}}{4}\frac{\delta_2}{g}M_Z,$$

$$m_c = 2\sqrt{5}\frac{\rho_2}{g}M_Z,$$

$$m_b = m_\tau = -\frac{\sqrt{10}}{4}\frac{\delta_3}{g}M_Z, \tag{2.25}$$

$$m_t = 2\sqrt{5}\frac{\rho_3}{g}M_Z.$$

All the above mass parameters are not independent. Choosing the 14 independent parameters of the theory (with 3-fermion families and neglecting the Cabibbo angles) to be: the gauge coupling constant "g", four superheavy masses "M_X, M_8, M_3, M_{24}" two light masses "M_W, M_5", six fermion masses "$m_e, m_\mu, m_\tau, m_u, m_c, m_t$" and one mixing angle "$\phi$" (between the neutral Higgs), all the other masses, mixing angles and potential coupling constants can be expressed as functions of the 14 independent parameters indicated before.

In the applications we always neglect terms of order $v_0^2/v^2 \sim O(10^{-26})$ compared to unity. In this approximation one has the tree-level relations

$$\begin{aligned} M_Z^2 &= \tfrac{8}{5} M_W^2 , \\ M_Y^2 &= M_X^2 , \\ M_{23}^2 &= M_4^2 = 4M_8^2 . \end{aligned} \tag{2.26}$$

We close this section noting that this spectrum is obtained using the 't Hooft–Landau gauge. If one uses a general covariant gauge the Goldstone bosons become massive.

3. Renormalization, A–Z mixing

The most important consequence of grand unification is that the strength of the three different low-energy interactions (strong, electromagnetic, weak) are described with one gauge coupling constant. The way the three low-energy effective interactions are related will be presented in the following section. Here we examine some consequences of the renormalizability of the spontaneously broken gauge theories which will be used in the next sections.

In the symmetric phase of the theory, which is defined by the lagrangian (2.7) with $\mu^2, \nu^2 < 0$, the renormalization procedure redefines the bare fields, bare coupling constants and bare masses in terms of the renormalized ones as

$$\phi_R^i = Z_{\phi^i}^{1/2} \phi_0^i , \qquad (\phi^i \to W, \phi, H, \chi, \psi) , \tag{3.1a}$$

$$g_R = Z_g g_0 , \tag{3.1b}$$

$$\lambda_R^i = Z_{\lambda^i} \lambda_0^i , \qquad (\lambda^i \to \lambda, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta, \rho_i, \delta_i) , \tag{3.1c}$$

$$m_R^{i2} = m_0^{i2} - \delta m^{i2} , \qquad (m_i^2 \to -\mu^2, -\nu^2) . \tag{3.1d}$$

The label 0 denotes bare quantities and the R renormalized ones. Once the Z_{ϕ^i}, Z_g, Z_{λ^i} and δm^{i2} are found, the Green functions of the theory are finite. It is well known that the counterterms of the symmetric phase make the theory in the broken phase also finite. So, using the same wave-function renormalizations Z_{ϕ^i} and the same gauge coupling constant renormalization Z_g and instead of the λ^i and m^i renormalization $(Z_{\lambda^i}, \delta m^i)$ using the 13 independent parameters chosen in the previous section, i.e. the mass renormalization δM_X, δM_3, δM_8, δM_W, δM_5, δm_f^i and

the mixing angle renormalization $\delta\phi$, we will find the spontaneously broken SU(5) theory to be finite.

What are the consequences of this observation? First, the wave-function renormalization constants of the left-handed leptons are the same as those of the neutrino and the right-handed d-quark because they belong to the same $\bar{5}$ multiplet. Also, the wave-function renormalization of the right-handed leptons is the same as that of the left-handed d-quark and both of the left and right-handed u-quark as they belong to the same 10 multiplet. Similarly, the photon wave-function renormalization will be the same as that of the Z-boson, $W^{\pm}$ bosons, gluons and superheavy gauge bosons $X_i^{\pm}$, $Y_i^{\pm}$. The same is true for all multiplets W_a, χ, ψ, ϕ, H which appear in the SU(5) model. Second, the gauge coupling constant counterterm Z_g will be the same for the strong, electromagnetic and weak interactions. This seems to be strange because only one β-function can be defined through a unique Z_g,

$$\beta_{SU(5)} = g_R \mu^2 \frac{d}{d\mu^2} Z_g , \tag{3.2}$$

which does not seem to explain the presence of the three distinct β-functions $\beta_{U(1)}$, $\beta_{SU(2)}$, $\beta_{SU(3)}$ in the low-energy region. In the next sections we answer this question and we explain in detail the way to define the three β-functions. We will see for example that $\beta_{U(1)}$ is an SU(5) β-function with a particular definition of the renormalized coupling constant. The same is true for $\beta_{SU(2)}$ and $\beta_{SU(3)}$:

$$\begin{aligned} \beta^{(1)}_{SU(5)} &= \beta_{U(1)} , \\ \beta^{(2)}_{SU(5)} &= \beta_{SU(2)} , \qquad \text{in the low-energy region .} \\ \beta^{(3)}_{SU(5)} &= \beta_{SU(3)} , \end{aligned} \tag{3.3}$$

Working in the spontaneously broken phase of the theory, care must be taken with the redefinition of the physical particles, order by order in perturbation theory. As we saw in sect. 2 the definitions of the physical particles (as the photon A and Z; $\tilde{\phi}_Y$, $\tilde{H}_Y$; $\tilde{\phi}_W$, $\tilde{H}_W$; $\tilde{\phi}_{24}$, $\tilde{\phi}_{23}$, $\tilde{H}_5$) are given as rotations of the nonphysical ones W_3, B; ϕ_Y, H_Y; ϕ_W, H_W; ϕ_{24}, ϕ_{23}, R_5). The case of the A and Z is just an internal rearrangement inside the same multiplet contrary to the other cases (ex. $\tilde{\phi}_Y$, $\tilde{H}_Y$) which mix two different multiplets. In the tree-level approximation the A and Z are given in terms of W_3 and B as

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}_0 = R_{\theta_0} \begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix}_0 , \qquad \text{with } R_{\theta_0} = \begin{pmatrix} c_0 & s_0 \\ -s_0 & c_0 \end{pmatrix} , \tag{3.4}$$

where $s_0 = \sin\theta_0 = \sqrt{\frac{3}{8}}$ and $c_0 = \cos\theta_0 = \sqrt{\frac{5}{8}}$.

When the different interactions come in, the above relation is modified, but a similar equation is valid:

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}_R = R_\theta \begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix}_R , \qquad \text{with } R_\theta = \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} , \tag{3.5}$$

and $s = s_0 + g^2\Delta$.

Since W_3 and B are two components of the same multiplet they need the same wave-function counterterm Z_W:

$$W_R^a = Z_W^{1/2} W_0^a . \tag{3.6}$$

Combining the last equation with eqs. (3.4), (3.5) we get

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}_R = Z_W^{1/2} R_{(\theta-\theta_0)} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}_0 , \qquad R_{(\theta-\theta_0)} = \begin{pmatrix} c_\Delta & s_\Delta \\ -s_\Delta & s_\Delta \end{pmatrix} , \tag{3.7}$$

with $s_\Delta = \sin(\theta - \theta_0)$ and $c_\Delta = \cos(\theta - \theta_0)$.

One needs the rotation $(\theta - \theta_0)$ to redefine the renormalized photon A and Z boson, as explained later on; comparing the renormalization relation (3.7) valid for the SU(5) model with the corresponding relation in the standard WS model $SU(2) \times U(1)$ one finds an essential difference: In the WS case, the renormalization of the (A, Z) is more complicated because the W_3 and B fields appear in two different multiplets, therefore two independent wave-function renormalization constants are needed:

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}_R = R_\theta \begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix}_R = R_\theta \begin{pmatrix} Z_2 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}^{1/2} \begin{pmatrix} W_3 \\ B \end{pmatrix}_0 , \tag{3.8a}$$

or

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}_R = R_\theta \begin{pmatrix} Z_2 & 0 \\ 0 & Z_1 \end{pmatrix}^{1/2} R_{-\theta_0} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}_0 \qquad \text{in the } SU(2) \times U(1) \text{ model} . \tag{3.8b}$$

Also, $\sin\theta_0$ is not fixed but is an independent parameter of the theory. A similar situation appears in the SU(5) model for example in the case of $\tilde{\phi}_Y$ and $\tilde{H}_Y$ renormalization because these fields are a combination of fields belonging to different multiplets ϕ_Y in 24, H_Y in 5. Let us now examine the renormalization procedure more precisely. But before doing so let us clarify our notation.

(i) We denote by $\Gamma(W_a^\mu, W_b^\nu)$ (fig. 1a) the 1PI two-point function of the gauge bosons and by $\Gamma_T(W_a, W_b)$ and $\Gamma_L(W_a, W_b)$ the coefficients of the decomposition

$$\Gamma(W_a^\mu, W_b^\nu) = \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \Gamma_T(W_a, W_b) + g^{\mu\nu} \Gamma_L(W_a, W_b) , \tag{3.9a}$$

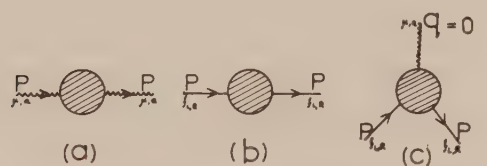


Fig. 1. (a) The 1PI two-point function of the gauge bosons $\Gamma(W_a^\mu, W_b^\nu)$. (b) The 1PI two-fermion function $\Gamma(f_{L,R} f_{L,R})$. (c) The 1PI three-point function of one gauge boson and two fermions $\Gamma(f_{L,R} W_a^\mu f_{L,R})$ at zero transfer momentum.

where p^μ is the external vector momentum. $\Gamma_T(W_a, W_b)$ is related to the wave-function renormalization and $\Gamma_L(W_a, W_b)$ to the vector-boson mass renormalization. It is convenient to define the function $\Pi_{ab}(p^2)$ as the derivative with respect to p^2 of $\Gamma_T(W_a, W_b)$ which has the property to be finite without a mass counterterm subtraction:

$$\Pi_{ab}(p^2) = \frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_T(W_a, W_b)\,. \tag{3.9b}$$

(ii) We denote by $\Gamma(f_{L,R}, f_{L,R})$ the 1PI two-fermion function (fig. 1b) and by $S_{f_{L,R}f_{L,R}}(p^2)$ the $\gamma^\mu(1\pm\gamma_5)/2$ part of the p^μ derivative of $\Gamma(f_{L,R}, f_{L,R})$:

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu}\Gamma(f_{L,R}, f_{L,R}) = \gamma^\mu \frac{1\pm\gamma_5}{2} S_{f_{L,R}f_{L,R}}(p^2) + p^\mu \text{ terms}\,. \tag{3.10}$$

The function $S_{f_{L,R}f_{L,R}}(p^2)$ has the same property as $\Pi_{ab}(p^2)$ to be finite without a mass counterterm subtraction.

(iii) Finally we denote by $\Gamma(f_{L,R}W_a^\mu f_{L,R})$ the 1PI three-point function of one gauge boson and two left- or right-handed fermions, and by $V_{f_{L,R}W^a f_{L,R}}(p^2)$ the $\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)/2$ coefficient of the $\Gamma(f_{L,R}W_a^\mu f_{L,R})$ evaluated at zero momentum transfer (see fig. 1c):

$$\Gamma(f_{L,R}W_a^\mu f_{L,R})|_{q^\mu=0} = \gamma^\mu \frac{(1\pm\gamma^5)}{2} g V_{f_{L,R}W_a f_{L,R}}(p^2) + p^\mu \text{ terms}\,. \tag{3.11}$$

According to eq. (3.7), one can see that the 1PI two-point function combination of A and Z satisfies the following renormalization relation:

$$\begin{pmatrix}\Gamma(Z^\mu Z^\nu) & \Gamma(Z^\mu A^\nu)\\ \Gamma(A^\mu Z^\nu) & \Gamma(A^\mu A^\nu)\end{pmatrix}_R = Z_W R_{(\theta-\theta_0)} \begin{pmatrix}\Gamma(Z^\mu Z^\nu) & \Gamma(Z^\mu A^\nu)\\ \Gamma(A^\mu Z^\nu) & \Gamma(A^\mu A^\nu)\end{pmatrix}_0 R_{-(\theta-\theta_0)}\,, \tag{3.12a}$$

or

$$\begin{pmatrix}\Gamma_R(Z^\mu Z^\nu) & \Gamma_R(Z^\mu A^\nu)\\ \Gamma_R(A^\mu Z^\nu) & \Gamma_R(A^\mu A^\nu)\end{pmatrix}$$

$$= Z_W \begin{bmatrix} c_\Delta^2\Gamma_0(Z^\mu Z^\nu) + s_\Delta^2\Gamma_0(A^\mu A^\nu) + 2s_\Delta c_\Delta \Gamma_0(A^\mu Z^\nu) \\ s_\Delta c_\Delta[\Gamma_0(A^\mu A^\nu) - \Gamma_0(Z^\mu Z^\nu)] + (c_\Delta^2 - s_\Delta^2)\Gamma_0(A^\mu Z^\nu) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_\Delta c_\Delta(\Gamma_0(A^\mu A^\nu) - \Gamma_0(Z^\mu Z^\nu)) + (c_\Delta^2 - s_\Delta^2)\Gamma_0(A^\mu Z^\nu) \\ s_\Delta^2\Gamma_0(Z^\mu Z^\nu) + c_\Delta^2\Gamma_0(A^\mu A^\nu) + 2c_\Delta s_\Delta \Gamma_0(A^\mu Z^\nu) \end{bmatrix}. \tag{3.12b}$$

At the one-loop level, relations (3.12a, b) become very simple

$$\Gamma_R(Z^\mu Z^\nu) = (1 + Z_W^{(1)})\Gamma_0(Z^\mu Z^\nu)\,, \tag{3.13a}$$

$$\Gamma_R(A^\mu A^\nu) = (1 + Z_W^{(1)})\Gamma_0(A^\mu A^\nu)\,, \tag{3.13b}$$

$$\Gamma_R(A^\mu Z^\nu) = \Gamma_0(A^\mu Z^\nu) + M_Z^2\left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)\sin(\theta - \theta_0)\,, \tag{3.13c}$$

where $Z_W = 1 + Z_W^{(1)} + O(g^4)$ [in eqs. (3.1a)]. Note that $\Gamma_0(A^\mu Z^\nu)$ is finite at the one-loop level, and $\Gamma_0(Z^\mu Z^\nu)$, $\Gamma_0(A^\mu A^\nu)$ are multiplicatively renormalizable. This is true only at this approximation, at higher orders (see eq. 3.12b) the relation between Γ_0 and Γ_R being more complicated.

In the standard WS model the corresponding relation to eq. (3.12a) becomes much more complicated:

$$\begin{bmatrix}\Gamma(Z^\mu Z^\nu) & \Gamma(Z^\mu A^\nu)\\ \Gamma(A^\mu Z^\nu) & \Gamma(A^\mu A^\nu)\end{bmatrix}_R = R_\theta\begin{pmatrix}Z_2 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}^{1/2} R_{-\theta_0}\begin{bmatrix}\Gamma(Z^\mu Z^\nu) & \Gamma(Z^\mu A^\nu)\\ \Gamma(A^\mu Z^\nu) & \Gamma(A^\mu A^\nu)\end{bmatrix}_0 R_{\theta_0}\begin{pmatrix}Z_2 & 0\\ 0 & Z_1\end{pmatrix}^{1/2} R_{-\theta}\,. \tag{3.14}$$

At the one-loop level it is also true that $\Gamma_0(Z^\mu Z^\nu)$ and $\Gamma_0(A^\mu A^\nu)$ are multiplicatively renormalizable. The difference from the SU(5) model is that the A and Z wave-function renormalizations are combinations of $Z_1^{(1)}$, $Z_2^{(1)}$ and $\sin^2\theta_0$. On the other hand, $\Gamma_0(A^\mu Z^\nu)$ is infinite and it is related to the $\Gamma_R(A^\mu, Z^\nu)$ through $Z_1^{(1)}$, $Z_2^{(2)}$ and $\sin^2\theta_0$ which are also infinite.

Eq. (3.12a) is also valid for the scalar functions $\Pi_{ab}(p^2)$ $(i, j = A, Z)$ defined by eqs. (3.9a, b):

$$\begin{bmatrix}\Pi_{ZZ} & \Pi_{ZA}\\ \Pi_{AZ} & \Pi_{AA}\end{bmatrix} = Z_W R_{(\theta-\theta_0)}\begin{bmatrix}\Pi_{ZZ} & \Pi_{ZA}\\ \Pi_{AZ} & \Pi_{AA}\end{bmatrix} R_{-(\theta-\theta_0)}\,. \tag{3.15a}$$

Let us now consider the way the 1PI three-point functions $\Gamma(fZ^\mu f)$ and $\Gamma(fA^\mu f)$ are renormalized. Using eq. (3.7) one has

$$\begin{pmatrix}\Gamma(fZ^\mu f)\\ \Gamma(fA^\mu f)\end{pmatrix}_R = Z_W^{1/2} Z_f R_{(\theta-\theta_0)}\begin{pmatrix}\Gamma(fZ^\mu f)\\ \Gamma(fA^\mu f)\end{pmatrix}_0\,, \tag{3.15b}$$

where Z_f is the fermion wave function counterterm defined by the equation

$$\Gamma_R(ff) = Z_f\Gamma_0(ff)\,, \tag{3.16a}$$

or

$$S_{ff}(p^2)_R = Z_f S_{ff}(p^2)_0\,. \tag{3.16b}$$

Eq. (3.15) implies that the vertex functions V_{fAf} and V_{fZf} (see eq. 3.10) are renormalized as

$$\begin{pmatrix}V_{fZf}\\ V_{fAf}\end{pmatrix}_R = Z_1 R_{(\theta-\theta_0)}\begin{pmatrix}V_{fZf}\\ V_{fAf}\end{pmatrix}_0\,, \tag{3.17a}$$

where Z_1 is the 1PI vertex counterterm,

$$Z_1 = Z_W^{1/2} Z_f Z_g^{-1}\,, \qquad \text{with } g_R = Z_g g_0\,. \tag{3.17b}$$

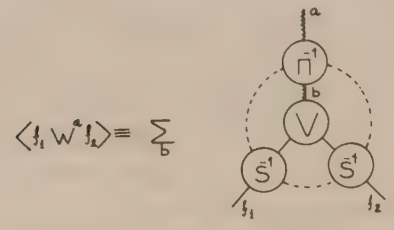


Fig. 2. Diagrammatic representation of the effective charges $\langle f_1 W^a f_2 \rangle$.

Our aim is to determine Z_g. This determination is not unique, and depends on the renormalization condition chosen for the 1PI two- and three-point functions. To relate as much as possible this choice to the measured coupling constants we define a quantity $\langle fW^a f \rangle$, $a = 1, 2, \ldots, 24$, that we call "effective charge of the W^a" as

$$\langle f_1 W^a f_2 \rangle = \sum_b S^{-1/2}_{f_1 f_1} S^{-1/2}_{f_2 f_2} \Pi^{-1/2}_{ab} V_{f_1 w^b f_2} . \tag{3.18}$$

In fig. 2 we give a diagrammatic representation of the effective charges.

They indicate the strength of the interaction between the vector boson W^a and the fermions f_1 and f_2. The renormalization of these objects is very simple and it can be expressed only with Z_g.

(i) A and Z effective charges:

$$\begin{pmatrix} \langle fZf \rangle \\ \langle fAf \rangle \end{pmatrix}_R = Z_g^{-1} R_{(\theta - \theta_0)} \begin{pmatrix} \langle fZf \rangle \\ \langle fAf \rangle \end{pmatrix}_0 . \tag{3.19a}$$

(ii) $W^{\pm}$ effective charge:

$$\langle f_1 W^{\pm} f_2 \rangle_R = Z_g^{-1} \langle f_1 W^{\pm} f_2 \rangle_0 . \tag{3.19b}$$

(iii) Gluon effective charge:

$$\langle fG^a f \rangle_R = Z_g^{-1} \langle fG^a f \rangle_0 . \tag{3.19c}$$

Eqs. (3.19a, b, c) are obtained simply from eqs. (3.15), (3.16b), (3.17b), (3.18). Imposing a renormalization condition to one renormalized effective charge, say $\langle fAf \rangle_R$, Z_g is determined, once the rotation $(\theta - \theta_0)$ is known. The other effective charges $\langle fW^a f \rangle$ are renormalized with the same Z_g and there is no other freedom left for the renormalized quantities. The problem is how can one simply determine θ. This can be done easily. If one calculates the bare neutrino matrix element $\langle \nu A \nu \rangle_0$, one will find that it is different from zero. On the other hand, one knows that the renormalized $\langle \nu A \nu \rangle_R$ must give zero. Using (3.18) and (3.19a) one has

$$\operatorname{tg}(\theta - \theta_0) = \frac{\langle \nu A \nu \rangle_0}{\langle \nu Z \nu \rangle_0} \Leftrightarrow \langle \nu A \nu \rangle_R = 0 . \tag{3.20}$$

One can also use the fact that the left-handed effective charge must be equal to

the right-handed one

$$\langle f_L A f_L\rangle_R = \langle f_R A f_R\rangle_R \,. \tag{3.21}$$

The bare quantities do not, in general, satisfy the above relation. Using eqs. (3.18) and (3.20) one finds

$$\mathrm{tg}\,(\theta-\theta_0) = \frac{\langle f_L A f_L\rangle_0 - \langle f_R A f_R\rangle_0}{\langle f_L Z f_L\rangle_0 - \langle f_R Z f_R\rangle_0} \,. \tag{3.22}$$

Eq. (3.22) generalizes (3.20) and is valid for all fermions. The question that arises here is that in general this angle [eq. (3.22)] may be a fermion-dependent quantity. In appendix A we give the proof that the value of $(\theta-\theta_0)$ is fermion independent at the one-loop level and in the approximation where the first fermion family (where the effective charges are defined) is massless. In the same appendix we demonstrate that the $\langle fZf\rangle_R$, $\langle fAf\rangle_R$, $\langle f_1 W^{\pm} f_2\rangle_R$ and $\langle fG^a f\rangle_R$ have the following forms:

$$\langle fAf\rangle_R = iZ_g^{-1} R_A(p)\sqrt{\tfrac{3}{8}}Q_f \,, \tag{3.23a}$$

$$\langle fZf\rangle_R = iZ_g^{-1} R_Z(p)\sqrt{\tfrac{8}{5}}[T_{3f} - Q_f \sin^2\theta_{\gamma Z}] \,, \tag{3.23b}$$

$$\langle f_1 W^{\pm} f_2\rangle_R = iZ_g^{-1} R_W(p)(T_{\pm})_{12} \,, \tag{3.23c}$$

$$\langle f_1 G^a f_2\rangle_R = iZ_g^{-1} R_G(p)(\lambda^a)_{12} \,, \tag{3.23d}$$

where R_i, $i = A, Z, W, G$ are fermion-independent functions of the momentum p, Q_f is the electric charge of the fermion f, $T \equiv (T_{3f}, T_{+f}, T_{-f})$ is the weak SU(2) generators action on the fermion f and $2\lambda^a$ are the 8 Gell-Mann SU(3) matrices.

We close this section by giving the renormalization conditions we choose

(i) Vector-boson two-point functions:

$$\text{(1)}\quad \Gamma_R(W_a^{\mu}, W_a^{\nu})|_{p^2=M_{W_a}^2} = 0 \,, \qquad \text{for the independent mass parameters } M_W, M_X \,. \tag{3.24a}$$

$$\text{(2)}\quad \Pi_{aa}(-p^2)_R|_{p^2=-\mu^2} = i \qquad \Rightarrow Z_a^{-1} = \Pi_{aa}^0(\mu^2) \,, \tag{3.24b}$$

for one specific component a.

(ii) Fermion two-point functions:

$$[\Gamma_R(f_R f_R) + \Gamma_R(f_L f_L)]\|_{\not p = m_f} = 0 \,, \qquad \text{for every independent fermion mass parameter} \,, \tag{3.25a}$$

$$S_{ff}(-p^2)|_{p^2=-\mu^2} = i \qquad \Rightarrow Z_f^{-1} = S_{ff}^0(\mu^2) \,, \tag{3.25b}$$

for one component f in each irreducible representation of fermions.

(iii) Effective charge renormalization

$$R_a(-p^2)|_{p^2=-\mu^2} = 1 \qquad \Rightarrow Z_{g_a} = R_a(\mu^2) \,, \tag{3.26}$$

where the index a is one of the components in the adjoint representation.

4. β-function definitions

We are going to describe now the formalism we use to determine the relations between the observed strength of the three interactions at low energies.

As we noted in the previous section, in the SU(5) model, the unique coupling constant g is defined using only one renormalization condition. For example one can choose this condition to be,

$$g_G\langle f_i G^a f_j\rangle_R|_{p^2=-\mu^2} = i\lambda^a_{ij} g_G\,, \tag{4.1}$$

then one obtains a counterterm Z_{g_G} and a renormalized coupling constant g_G such that [see eqs. (3.19c), (3.26)]

$$Z_{g_G}(g_G, \varepsilon, \mu^2, m_i^2) = R_G(\mu^2)\,, \tag{4.2a}$$

$$g_G = Z_{g_G} g_0\,, \tag{4.2b}$$

where we used the dimensional regularization in $n = 4-2\varepsilon$ dimensions.

Using now this counterm we will find the photon (for example) three-point function $\langle fAf\rangle_R$ to be also finite. The problem is that the perturbative expansion of $\langle fAf\rangle_R$ in terms of the coupling constant g_G contains large logarithms and it becomes useless for practical computations. On the other hand, if one defines the unique coupling constant with the photon three-point function $\langle fAf\rangle_R$ as

$$g_A\langle fAf\rangle|_{p^2=-\mu^2} = i g_A\sqrt{\tfrac{3}{8}} Q_t\,, \tag{4.3}$$

which implies that

$$Z_{g_A}(g_A, \varepsilon, \mu^2, m_i^2) = R_A(\mu^2)\,, \tag{4.4a}$$

$$g_A = Z_{g_A} g_0\,, \tag{4.4b}$$

then, in the perturbative expansion of $\langle fAf\rangle$ in powers of $g_A\sqrt{\frac{3}{8}} \equiv e$ no such large logarithms appear; they will appear in the perturbative expansion of $\langle fGf\rangle_R$ in term of e. So one observes that some definitions of the renormalized coupling constants are useless for some matrix elements and quite good for some others.

In ref. [18] a method has been developed to relate g_A and g_G using renormalization group arguments. Let us write the non-perturbative relation between g_A and g_G as

$$g_A = g_A(g_G)\,; \tag{4.5}$$

then $g_A(g_G)$ satisfies the following differential equation:

$$\left[\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta_G(g_G)\frac{\partial}{\partial g_G}\right] g_A(g_G) = \beta_A(g_A(g_G))\,, \tag{4.6a}$$

with

$$\beta_i(g_i) = g_i \mu^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu^2} \log Z_{g_i}(g_i, \varepsilon, \mu^2, m_i^2)\,, \tag{4.6b}$$

$$\beta_i(g_i)=\tfrac{1}{2}g_i\left[b_0^i(\mu^2,m_i^2)\left(\frac{g_i}{4\pi}\right)^2+b_1^i(\mu^2,m_i^2)\left(\frac{g_i}{4\pi}\right)^4+O(g^6)\right]. \tag{4.6c}$$

Eq. (4.6a) is only true in the 't Hooft–Landau gauge with on-shell mass renormalization. In a general ξ gauge, terms like $\delta(g)\partial/\partial\xi$ appear and make the solution of this equation more complicated. Working always in the 't Hooft–Landau gauge, eq. (4.6a) is equivalent to the following system of differential equations:

$$\frac{dg_A}{\beta_A(g_A)}=\frac{dg_G}{\beta_G(g_G)}=\frac{d\mu^2}{\mu^2}. \tag{4.7}$$

Imposing the asymptotic condition

$$g_A(\mu)\underset{\mu\to\infty}{=}g_G(\mu), \tag{4.8}$$

which represents the uniqueness of the renormalized coupling constant in the limit where $m_i^2/\mu^2\to 0$ (massless limit or high-energy behaviour), one has the following integral solution of eq. (4.6a):

$$\frac{1}{g_i^2(\lambda)}-\frac{1}{g_j^2(\lambda)}=\int_0^\lambda\frac{dx}{x}\left[\frac{2\beta_i(g_i(x),x,\tau)}{g_i^3(x)}-\frac{2\beta_j(g_j(x),x,\tau)}{g_j^3(x)}\right], \tag{4.9}$$

where $\lambda=M_X^2/\mu^2$ and τ stands for all possible mass ratios. The relation (4.9) for the two-loop β_i functions becomes

$$\frac{1}{\alpha_i(\lambda)}-\frac{1}{\alpha_j(\lambda)}=\frac{1}{4\pi}\int_0^\lambda\frac{dx}{x}\left\{(b_i^0(x,\tau)-b_j^0(x,\tau)+\left(b_i^1(x,\tau)\frac{\alpha_i(x)}{4\pi}-b_j^1(x,\tau)\frac{\alpha_j(x)}{4\pi}\right)\right\}, \tag{4.10}$$

where $\alpha_i=g_i^2/4\pi$ and b_i^0, b_i^1 are defined in eq. (4.6c). In the following, eq. (4.10) will be our standard equation. It relates two different definitions of the same object (the renormalized gauge coupling constant of the SU(5) theory) up to two-loop level. As we have explained before, several definitions are needed in order to absorb the large logarithms which appear in the perturbative expansion in terms of the "non-natural" renormalized coupling constant. We list here the definitions we used through the effective charges defined by eqs. (3.18), (3.19):

$$\langle fZf\rangle_R|_{p^2=-\mu^2}=i\sqrt{\tfrac{8}{5}}[T_{3f}-Q_f\sin^2\theta]\to\alpha_Z, \tag{4.11a}$$

$$\langle fAf\rangle_R|_{p^2=-\mu^2}=i\sqrt{\tfrac{3}{8}}Q_f\to\alpha_A, \tag{4.11b}$$

$$\langle f_iG^af_j\rangle_R|_{p^2=-\mu^2}=i\lambda_{ij}^a\to\alpha_G, \tag{4.11c}$$

$$\langle f_1W^\pm f_2\rangle_R|_{p^2=-\mu^2}=iT_{12}^\pm\to\alpha_W, \tag{4.11d}$$

$$\langle f_\alpha W^a f_\beta\rangle_R\Big|_{\substack{p^2=-\mu^2\\ m_i^2=0}}=i\lambda_{\alpha\beta}^a,\ a=1,\dots,24\to\alpha_{sym}. \tag{4.11e}$$

The last definition of the renormalized coupling constant (4.11e) gives the symmetric counterterm $Z_{g_{sym}}$ of the unbroken SU(5) theory. One has,

$$Z_{g_{sym}} = R_i(\mu^2, m_i^2, g_{sym}, \varepsilon)|_{m_i^2=0} \equiv R_{sym}(\mu^2, \varepsilon, g_{sym}), \tag{4.12}$$

where $R_i|_{m_i^2=0}$, $i = A, Z, G, W, \ldots$, is independent of the choice of i. Writing $R_i(\mu^2, m_i^2, g_i, \varepsilon)$ in perturbation as

$$R_i(\mu^2, m_i^2, g_i, \varepsilon) = 1 + R_i^0(\mu^2, m_i^2, \varepsilon)\frac{1}{2}\frac{g_i^2}{(4\pi)^2} + R_i^1(\mu^2, m_i^2, \varepsilon)\frac{1}{2}\frac{g_i^4}{(4\pi)^4} + O(g_i^6), \tag{4.13}$$

it is straightforward to see that,

$$b_i^0(\mu^2, m_i^2) = \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} R_i^0(\mu^2, m_i^2, \varepsilon). \tag{4.14}$$

Now using the relation (4.14), eq. (4.10) becomes

$$\left(\frac{4\pi}{\alpha_i(\lambda)} - \frac{4\pi}{\alpha_j(\lambda)}\right) = R_j^0(\lambda, \tau) - R_i^0(\lambda, \tau) + \int_0^\lambda \frac{dx}{x}\left(b_i^1(x, \tau)\left(\frac{g_i}{4\pi}\right)^2 - b_j^1(x, \tau)\left(\frac{g_j}{4\pi}\right)^2\right), \tag{4.15}$$

where $i, j = A, Z, G, W, SYM$; $\lambda = M_X^2/\mu^2$, $\tau = M_i/M_X$ (all possible mass ratios).

To derive eq. (4.15) we use the property (4.12)

$$R_j^0(\lambda, \tau) - R_i^0(\lambda, \tau)|_{\lambda=0} = 0. \tag{4.16}$$

5. Threshold functions and decoupling theorem

The decoupling theorem [15, 16] applied to the SU(5) doubly broken gauge theory, tells us that working in a specific energy region one can use an effective theory to describe physical processes. Namely (i) the SU(5) symmetric theory for large energies, $\mu \gg M_X$; (ii) $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$ for intermediate energies $M_X \gg \mu \gg M_W$, and (iii) $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ for small energies $\mu \ll M_W$. The existence of these effective theories implies some interesting behaviour for the SU(5) β_i functions defined through the effective charges.

(i) In the large energy region one has the relation

$$\beta_i(g_i, \lambda_X, \lambda_W, \tau) \xrightarrow[\substack{\lambda_X \to 0 \\ \lambda_W \to 0}]{} \beta^{SU(5)}(g), \qquad \forall i = A, Z, W, G \ldots, \tag{5.1}$$

where $\lambda_X = M_X^2/\mu^2$, $\lambda_W = M_W^2/\mu^2$, $\beta^{SU(5)}$ is the symmetric SU(5) β-function.

(ii) In the intermediate energy region, one has the relations

$$\beta_G(g_G, \lambda_X, \lambda_W, \tau) \xrightarrow[\substack{\lambda_X \to \infty \\ \lambda_W \to 0}]{} \beta^{SU(3)}(g_3; g_1, g_2), \tag{5.2a}$$

$$\beta_W(g_W, \lambda_X, \lambda_W, \tau) \xrightarrow[\substack{\lambda_X\to\infty \\ \lambda_W\to 0}]{} \beta^{SU(2)}(g_2; g_1, g_3)\,, \tag{5.2b}$$

$$\frac{1}{g_A^3}\beta_A(g_A, \lambda_X, \lambda_W, \tau) \xrightarrow[\substack{\lambda_X\to\infty \\ \lambda_W\to 0}]{} \frac{c_0^2}{g_1^3}\beta^{U(1)}(g_1; g_2; g_3) + \frac{s_0^2}{g_2^3}\beta^{SU(2)}(g_2; g_1, g_3)\,, \tag{5.2c}$$

$$\frac{1}{g_Z^3}\beta_Z(g_Z, \lambda_X, \lambda_W, \tau) \xrightarrow[\substack{\lambda_X\to\infty \\ \lambda_W\to 0}]{} \frac{s_0^2}{g_1^3}\beta^{U(1)}(g_1; g_2, g_3) + \frac{c_0^2}{g_2^3}\beta^{SU(2)}(g_2; g_1, g_3)\,. \tag{5.2d}$$

In eqs. (5.2a–d) the three independent β-functions $\beta^{SU(3)}$, $\beta^{SU(2)}$ and $\beta^{U(1)}$ are given as

$$\frac{2}{g_i}\beta^{SYM(i)} = \left(\frac{g_i}{4\pi}\right)^2 \sum_{j=1}^{3}\left[b_i^0\delta_{ij} + b_{ij}^1\left(\frac{g_j}{4\pi}\right)^2\right] + O(g_k^6)\,, \tag{5.3}$$

where $\beta^{SYM(i)}$ stands for $\beta^{U(1)}$, $\beta^{SU(2)}$, $\beta^{SU(3)}$ for $i = 1, 2, 3$ and the coefficients b_i^0, b_{ij}^1 are given in the end of sect. 6.

Eqs. (5.2c, d) are simply related to the charge relation in SU(5):

$$s_0 Q = -s_0 T_3 + c_0 Y\,; \qquad c_0 = \sqrt{\tfrac{3}{8}}\,, \qquad s_0 = \sqrt{\tfrac{3}{8}}\,, \tag{5.5a}$$

with

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & +1 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & -\frac{1}{2} & \\ & & & & +\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$Y = \sqrt{\tfrac{3}{5}}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & & & & \\ & -\frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{3} & & \\ & & & +\frac{1}{2} & \\ & & & & +\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{5.5b}$$

The charge relation (5.5a) is still valid for the effective $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$ which implies the well-known WS relations ($e \equiv g_A s_0$, $g' \equiv g_1 s_0/c_0$)

$$e \equiv s_0 g_A = s g_2\,, \tag{5.6a}$$

$$g' \equiv g_1 \frac{s_0}{c_0} = \frac{s}{c} g_2\,, \tag{5.6b}$$

where $s = \sin\theta_W$ and $c = \cos\theta_W$. From eqs. (5.6a, b) one simply has,

$$\frac{1}{g_A^2} = \frac{s_0^2}{g_2^2} + \frac{c_0^2}{g_1^2}, \qquad \frac{1}{g_Z^2} = \frac{c_0^2}{g_2^2} + \frac{s_0^2}{g_1^2}, \tag{5.7}$$

which implies eqs. (5.2c, d).

(iii) Finally in the small energy region where the effective theory is $SU(3)_c \times U(1)^{em}$, one has

$$\beta_A(g_A, \lambda_X, \lambda_W, \tau) \xrightarrow[\substack{\lambda_X \to \infty \\ \lambda_W \to \infty}]{} \tilde{\beta}^{U(1)^{em}}(g_e; g_3), \tag{5.8a}$$

$$\beta_G(g_G, \lambda_X, \lambda_W, \tau) \xrightarrow[\substack{\lambda_X \to \infty \\ \lambda_W \to \infty}]{} \tilde{\beta}^{SU(3)}(g_3; g_e). \tag{5.8b}$$

In eqs. (5.8a, b), the two independent β-functions $\tilde{\beta}^{SU(3)}$ and $\tilde{\beta}^{U(1)^{em}}$ are given as

$$\frac{2}{g_i}\tilde{\beta}^{SYM(i)} = \left(\frac{g_i}{4\pi}\right)^2 \sum_{j=e,3} \left[\tilde{b}_i^0 \delta_{ij} + \tilde{b}_{ij}^1 \left(\frac{g_j}{4\pi}\right)^2\right] + O(g_k^6), \tag{5.8c}$$

where $\beta^{SYM(i)}$ stands for $\tilde{\beta}^{U(1)^{em}}$, $\tilde{\beta}^{SU(3)}$ for $i = e, 3$ and the coefficients $\tilde{b}_i^0$, $\tilde{b}_{ij}^1$ are given at the end of sect. 6.

To see how the decoupling theorem works let us examine the properties of the one-loop diagrams which contribute to the one-loop β_i functions. In the limit where we neglect the first family fermion masses the general form of the contribution to $R_i^0(-p^2)$ of a particular diagram has the form,

$$F(-p^2, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2}\frac{g^2}{(4\pi^2)}\left[\frac{C_F(\varepsilon)}{\varepsilon} - C_F(0)\log(-p^2) + \varphi_F(\lambda_1, \lambda_2) + O(\varepsilon)\right], \tag{5.9a}$$

with

$$\varphi_F(0, 0) = 0. \tag{5.9b}$$

ε is the dimensional regularized parameter $\varepsilon = \frac{1}{2}(4-n)$ and $\lambda_i = m_i^2/p^2$, m_1 and m_2 being the masses of the particles inside the loop. In general three masses appear (vertex-loops), but in the limit where the first fermion family is taken massless only two masses remain; this approximation corresponds to neglecting terms proportional to $(m_t/M_W)^2$ in the β-functions.

The first two terms give the contribution of the symmetric massless theory while the function $\varphi_F(\lambda_1, \lambda_2)$ includes all mass threshold effects. The contribution of F to the corresponding β-function is

$$\Delta b_0 = \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2}\left[\frac{C_F(\varepsilon)}{\varepsilon} - C_F(0)\log\mu^2 + \varphi_F(\lambda_1, \lambda_2)\right], \tag{5.10a}$$

$$\Delta b_0 = -C_F(0) + \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2}\varphi_F(\lambda_1, \lambda_2), \qquad \lambda_i = \frac{m_i^2}{\mu^2}. \tag{5.10b}$$

The threshold function $\varphi_F(\lambda_1, \lambda_2)$ has the property to behave logarithmically when λ_1 and λ_2 are large and goes to zero when λ_1 and λ_2 are small (eq. 5.9b):

$$\varphi_F \begin{cases} \xrightarrow[\lambda_{1,2}\to 0]{} 0\,, \\ \xrightarrow[\lambda_{1,2}\to\infty]{} C_\varphi \log\lambda_1 + d\varphi\,, \end{cases} \tag{5.11}$$

where $d\varphi$ is a constant number, which depends on the ratio m_1/m_2. So, one has [eqs. (5.10b) and (5.11)]:

$$\Delta b_0 \begin{cases} \xrightarrow[\lambda_{1,2}\to 0]{} -C_F(0)\,, \\ \xrightarrow[\lambda_{1,2}\to\infty]{} -C_F(0) - C_\varphi\,. \end{cases} \tag{5.12}$$

We say that a particular diagram is decoupled in the low-energy region if the pole part is opposite to the large log coefficient of the corresponding threshold function:

$$C_F(0) = -C_\varphi\,. \tag{5.13}$$

In that case the bare quantity F becomes constant when λ_1 and $\lambda_2 \to \infty$

$$F(-p^2, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2) \xrightarrow[\lambda_{1,2}\to\infty]{} \frac{1}{2}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\left[\frac{C_F(\varepsilon)}{\varepsilon} - C_F(0)\log M_1^2 + d\varphi\right]. \tag{5.14}$$

A constant contribution of a diagram can always be absorbed in the bare lagrangian by a finite renormalization.

The mass-independent part of $F(\mu^2, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$,

$$F_s(\mu^2, \varepsilon) = \frac{1}{2}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\left[\frac{C_F(\varepsilon)}{\varepsilon} - C_F(0)\log\mu^2\right], \tag{5.15}$$

represents the symmetric theory contribution and it gives a Δb_s^0

$$\Delta b_s^0 = -C_F(0)\,. \tag{5.16}$$

Eq. (5.1) is a simple consequence of the relation

$$F(\mu^2, \varepsilon, \lambda_1, \lambda_2) \xrightarrow[\lambda_{1,2}\to 0]{} F_s(\mu^2, \varepsilon)\,. \tag{5.17}$$

The decoupling condition (5.13) is not valid, diagram by diagram, in the Landau gauge because the non-physical particles are massless. Indeed the graphs which violate this condition are the following:

(i) the FP ghosts loop (see fig. 3a);

(ii) the Goldstone bosons loop (see fig. 3b);

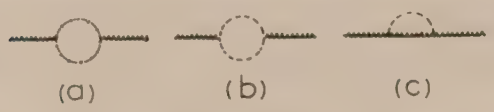


Fig. 3. (a) The FP ghost loop. (b) The Goldstone boson loop. (c) The massive vector boson and Goldstone boson loop $A(\lambda, 0)$.

(iii) the massive vector boson and Goldstone boson loop $A(\lambda, 0)$ (see fig. 3c).

The reason for diagrams (i) and (ii) is obvious. The non-physical particles, which correspond to some heavy bosons, are massless in the Landau gauge ($C_\varphi = 0$) while the pole part is different from zero ($C_F(0) \neq 0$). Diagram (iii) gives a finite contribution to the wave-function renormalization ($C_F(0) = 0$) while in the limit $\lambda \to \infty$ it behaves like a logarithm ($C_\varphi \neq 0$). Note that for a similar graph, where one has a physical massive Higgs boson instead of a Goldstone boson, the decoupling is valid. (In the limit where both masses go to infinity, it behaves like a constant and so $C_\varphi = 0$.)

But we know from general arguments that every diagram $D(\lambda_1, \lambda_2)$ with an internal loop of two gauge bosons, with masses M_1 and M_2, is associated to two tadpoles (which give zero contribution to the effective charges), one loop of the corresponding FP ghosts, one loop of the Goldstone bosons, which are responsible for the masses M_1, M_2 and finally two diagrams of a vector boson and its corresponding Goldstone boson $A(\lambda_1, 0)$, $A(\lambda_2, 0)$.

This combination, in which we have included all the non-physical degrees of freedom, verifies the decoupling condition (5.13). More generally this combination appears in any model of spontaneously broken theory and also in any general gauge ξ. So, we worked out the mechanisms of the decoupling at the one loop level of heavy particles in the Landau gauge for the vector boson propagator with light external vector bosons and heavy internal particles.

For the light fermion propagator and fermion-boson-fermion vertex function, the decoupling is valid graph by graph.

In appendix B we give the analytic expression of all the particular φ_F threshold functions A, B, C, D, E, F, G which are respectively the contribution of the Higgs-boson loop (fig. 4a), the Higgs' loop (fig. 4b), the fermionic loop (fig. 4c), the gauge boson loop (fig. 4d), the fermion-vector boson loop (fig. 4e), the abelian

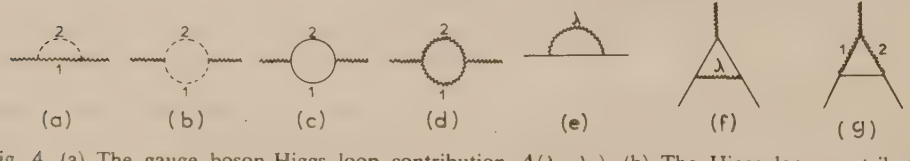


Fig. 4. (a) The gauge boson-Higgs loop contribution $A(\lambda_1, \lambda_2)$. (b) The Higgs loop contribution $B(\lambda_1, \lambda_2)$. (c) Fermionic loop contribution $C(\lambda_1, \lambda_2)$. (d) Gauge boson loop contribution $D(\lambda_1, \lambda_2)$. (e) Gauge boson-fermion loop contribution $E(\lambda)$. (f) Fermion-fermion gauge boson loop vertex contributions $F(\lambda)$. (g) The two gauge boson fermion loop vertex contribution $G(\lambda_1, \lambda_2)$.

type three-point function (fig. 4f), the non-abelian type three-point function (fig. 4g). The $A(\lambda_1, \lambda_2)$ function is the only one to be unsymmetrical in the change $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$. This is a characteristic function of the broken theory; it is zero in the zero mass limit.

Because of the abelian structure of E and F, one has (see appendix B)

$$\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Gamma_E(p) = g\gamma^\mu V_F(p) + p^\mu \text{ terms}, \tag{5.18}$$

which implies

$$E(\lambda) = F(\lambda). \tag{5.19}$$

Because of this property one can demonstrate (see appendix A) that D, G and E appear in the effective charge definitions always in the following combination:

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2) = D(\lambda_1, \lambda_2) - G(\lambda_1, \lambda_2) - \tfrac{1}{2}E(\lambda_1) - \tfrac{1}{2}E(\lambda_2). \tag{5.20}$$

Φ represents the non-abelian contribution to the effective charges which appears always in the combination (5.20) for any spontaneously broken gauge group. We conclude that one can express all the one-loop β_i functions in any spontaneously broken theory as a linear combination of the logarithmic derivative ($\mu^2 \partial/\partial\mu^2$) of the four independent threshold functions Φ, B, C and A.

For every function one has a family of curves with very similar properties: when $p^2 \to \infty$ they go to zero, while when $p^2 \to 0$ they behave like a logarithm plus a constant. The transition in the threshold region is very rapid (fig. 5). If $\varphi(\lambda_1, \lambda_2)$ denotes one of the functions Φ, B, C, one always has

$$|\varphi(\lambda, 0)| \leq |\varphi(\lambda, r\lambda)| \leq |\varphi(\lambda, \lambda)|, \qquad 0 < r < 1. \tag{5.21}$$

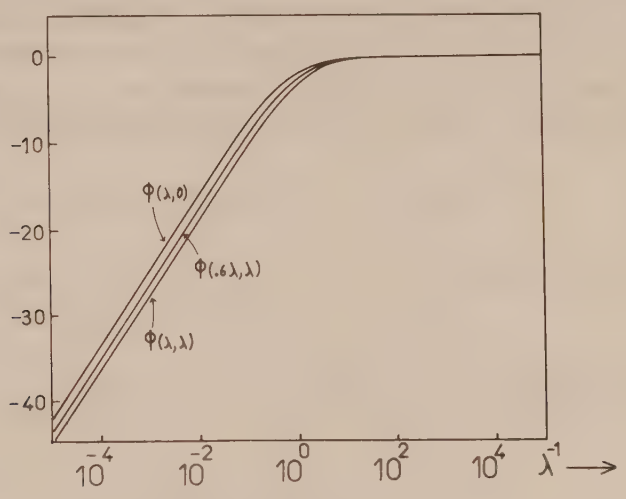


Fig. 5. Family of curves of $\Phi(\lambda, r\lambda)$; $r = 1, 0.6, 0$.

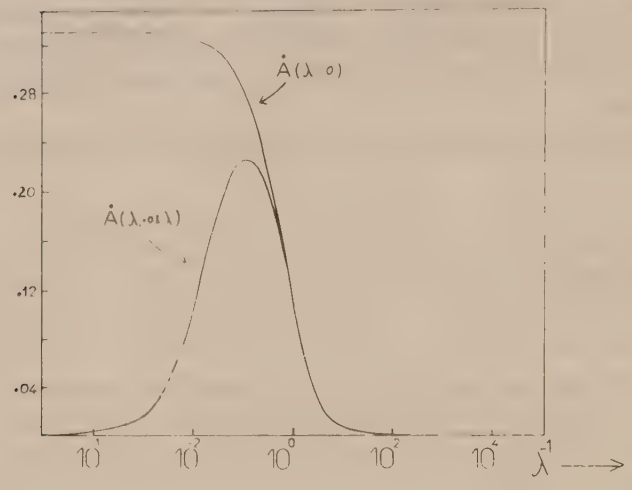


Fig. 6. β-function contribution of $A(\lambda, r\lambda)$ family; $r = 0, 0.01$.

$A(\lambda, 0)$ has similar properties as the other functions, while $A(\lambda, r\lambda)$ for $r \neq 0$ is different. In fact, when $p^2 \to 0$ it behaves like a constant and one has

$$0 \leq |A(\lambda, r\lambda)| \leq |A(\lambda, 0)|, \qquad 0 \leq r < \infty. \tag{5.22}$$

Normalizing the logarithmic behaviour of the different functions to one, the functions Φ, C, B and $A(\lambda, 0)$ are very similar although their analytic expressions are completely different (see appendix B). Their contributions to the various β-functions are proportional to the logarithmic derivatives with respect to p^2. To see what they look like we plot the logarithmic derivative of $A(\lambda, 0)$, $\dot{A}(\lambda, 0)$ (fig. 6). The typical contribution, of all these functions to the various β-functions is a smooth θ-function with a width $K \sim 10^2$. In fig. 6 we also plot $A(\lambda, r\lambda)$, $r \neq 0$ which gives a smooth δ-function contribution. A quite good approximation is to parametrize all the logarithmic derivatives of Φ, B, C, by some simple fit-functions as

$$b_\varphi \equiv p^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \varphi(\lambda, r\lambda) = -c_\varphi \theta_{\mathrm{SYM}}(r, \lambda), \tag{5.23a}$$

where

$$\theta_{\mathrm{SYM}}(r, \lambda) = \frac{1}{1+(1+r)^2\lambda}, \qquad 0 \leq r \leq 1. \tag{5.23b}$$

Before we close this chapter we list the different behaviours of C, B, A, Φ when $\lambda \to \infty$:

$$C(\lambda, r\lambda) \to \tfrac{4}{3} \log \lambda - \frac{2}{9} + \frac{8}{3} \frac{r}{(1-r)^2} - \frac{4}{3} \frac{r^2(r-3)}{(1-r)^3} \log r, \tag{5.24a}$$

$$C(\lambda, 0) \to \tfrac{4}{3}\log\lambda - \frac{2}{9}, \tag{5.24b}$$

$$C(\lambda, \lambda) \to \tfrac{4}{3}\log\lambda + \tfrac{8}{9}, \tag{5.24c}$$

$$B(\lambda, 0) \to \tfrac{1}{6}\log\lambda + \tfrac{1}{18}, \tag{5.25a}$$

$$B(\lambda, \lambda) \to \tfrac{1}{6}\log\lambda + \tfrac{5}{18}, \tag{5.25b}$$

$$A(\lambda, r\lambda) \to \frac{r-3}{6(1-r)^2} - \frac{1}{3(1-r)^3}\log r, \tag{5.26a}$$

$$A(\lambda, 0) \to \tfrac{1}{3}\log\lambda - \tfrac{2}{9}, \tag{5.26b}$$

$$\Phi(\lambda, r\lambda) \to \frac{89}{36} - \frac{2r}{(1-r)^2} - \tfrac{23}{6}\log\lambda + \frac{17-52r+23r^2}{6(1-r)^3} r\log r, \tag{5.27a}$$

$$\Phi(\lambda, 0) \to -\tfrac{23}{6}\log\lambda + \frac{31}{18}, \tag{5.27b}$$

$$\Phi(\lambda, \lambda) \to -\tfrac{23}{6}\log\lambda - \tfrac{43}{36}. \tag{5.27c}$$

6. g_i relations up to two-loop level

In eq. (4.15) we gave, in integral form, the relation between the different definitions of the renormalized coupling constant up to two-loop level. To solve this equation exactly one needs, in principle, the second-order mass dependence of the β_i functions $b_i^1(M^2/\mu^2)$. These functions are unknown but one can bound them supposing the decoupling theorem (see sect. 5). Let us see that for the case $\mu \gg M_W$. Using the decoupling relations (5.1), (5.2a–d), in the case where all the super-heavy masses are equal to M_X, one has

$$b_i^1\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) g_i^2(\mu) \xrightarrow[\mu \ll M_X]{} \sum_{m=1}^{3} b_{im}^1 g_m^2(\mu), \qquad [SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)], \tag{6.1a}$$

$$b_i^1\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) g_i^2(\mu) \xrightarrow[\mu \gg M_X]{} b_{SYM}^1 g^2(\mu), \qquad [SU(5)]. \tag{6.1b}$$

Supposing that the width of this transition is K, then $b_i^1(M^2/\mu^2)g_i^2(\mu)$ is bounded by the two functions $B_1^i(\mu^2, g_i)$, $B_2^i(\mu^2, g_i)$:

$$B_1^i(\mu^2, g_i) = \sum_{m=1}^{3} \left[b_{im}^1 \theta\left(\frac{4}{K} M_X^2 - \mu^2\right) + \delta_{im} b_{SYM}^1 \theta\left(\mu^2 - \frac{4}{K} M_X^2\right) \right] g_m^2(\mu), \tag{6.2a}$$

$$B_2^i(\mu^2, g_i) = \sum_{m=1}^{3} [b_{im}^1 \theta(4KM_X^2 - \mu^2) + \delta_{im} b_{SYM}^1 \theta(\mu^2 - 4KM_X^2)] g_m^2(\mu). \tag{6.2b}$$

Using the functions B_1^i and B_2^i one can integrate the second-order term which

appears in eq. (4.15). In the case where one of the renormalized coupling constants is the symmetric one, eq. (4.15) is written as ($M_W < \mu < M_X$):

$$\frac{4\pi}{\alpha_i(\mu)} - \frac{4\pi}{\alpha_{SYM}(\mu)} = -R_i(\mu) + R_{SYM}(\mu) - \sum_{m=1}^{3} \frac{b^1_{im}}{b^0_m} \log \frac{\alpha_i(\mu)}{\alpha_i(2M_X)} + \frac{b^1_{SYM}}{b^0_{SYM}} \log \frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(2M_X)} \pm \Delta_i(K), \tag{6.3}$$

where b^0_{im}, b^1_{im}, $m = 1, 2, 3$, are the symmetric β-function coefficients of U(1), $SU(2)_L$ and $SU(3)_c$; b^0_{SYM} and b^1_{SYM} correspond to the SU(5) symmetric β-function coefficients, and $\Delta_i(K)$ represents the uncertainties coming from the unknown exact expression of the second-order β_i function.

$$\Delta_i(K) = \frac{\alpha_i(2M_X)}{4\pi} \sum_{m=1}^{3} b^1_{im} \log K. \tag{6.4}$$

Using the equation between $\alpha_{SYM}(\mu)$ and $\alpha_{SYM}(2M_X)$,

$$\frac{4\pi}{\alpha_{SYM}(\mu)} - \frac{4\pi}{\alpha_{SYM}(2M_X)} = -R_{SYM}(\mu) + R_{SYM}(2M_X) - \frac{b^1_{SYM}}{b^0_{SYM}} \log \frac{\alpha_{SYM}(\mu)}{\alpha_{SYM}(2M_X)}, \tag{6.5}$$

one can write eq. (6.3) as ($2M_W < \mu < 2M_X$)

$$\frac{4\pi}{\alpha_i(\mu)} = \frac{4\pi}{\alpha_{SYM}(2M_X)} + R_{SYM}(2M_X) - R_i(\mu) - \sum_{m=1}^{3} \frac{b^1_{im}}{b^0_m} \log \frac{\alpha_i(\mu)}{\alpha_i(2M_X)} \pm \Delta_i(K). \tag{6.6a}$$

Iterating (6.6a) we obtain, for $2M_W < \mu < 2M_X$,

$$\frac{4\pi}{\alpha_i(\mu)} = \frac{4\pi}{\alpha_{SYM}(2M_X)} + R_{SYM}(2M_X) - R_i(\mu) + \sum_{m=1}^{3} \frac{b^1_{im}}{b^0_m} \log \left[1 + \frac{\alpha_{SYM}(2M_X)}{4\pi} (R_m(2M_X) - R_m(\mu)) \right]. \tag{6.6b}$$

We note that for $2M_X < \mu$ one has

$$\frac{4\pi}{\alpha_i(\mu)} = \frac{4\pi}{\alpha_{SYM}(2M_X)} + R_{SYM}(2M_X) - R_i(\mu) + \frac{b^1_{SYM}}{b^0_{SYM}} \log \left[1 - \frac{\alpha_{SYM}(2M_X)}{4\pi} (R_{SYM}(2M_X) - R_{SYM}(\mu)) \right]. \tag{6.6c}$$

From eqs. (6.6a–c) we can obtain the g_i relation up to two-loop level for $2M_X > \mu >$

$2M_W$, in a simple way:

$$\frac{4\pi}{\alpha_i(\mu)}-\frac{4\pi}{\alpha_j(\mu)}=-R_i(\mu)+R_j(\mu)+\sum_{m=1}^{3}\frac{b^1_{im}-b^1_{jm}}{b^0_m}\times\log\left[1+\frac{\alpha_{SYM}(2M_X)}{4\pi}(R_m(2M_X)-R_m(\mu))\right]\pm(\Delta_i(K)-\Delta_j(K))\,. \tag{6.7}$$

Doing a similar approximation for the M_W threshold putting $M_5=M_W$ and $m_t\ll M_W$ one obtains, for every value of μ, the g_i relations

$$\frac{4\pi}{\alpha_i(\mu)}-\frac{4\pi}{\alpha_j(\mu)}=\begin{cases}-R_i(\mu)+R_j(\mu), & \mu>M_X\,,\\ -R_i(\mu)+R_j(\mu)+F_i(\mu)-F_j(\mu), & M_W>\mu>M_X\,,\\ -R_i(\mu)+R_j(\mu)+F_i(2M_W)-F_j(2M_W) & \\ +\tilde{F}_i(\mu)-\tilde{F}_j(\mu)\,, & \mu<M_W\,,\end{cases} \tag{6.8}$$

where

$$F_i(\mu)=\sum_{m=1}^{3}\frac{b^1_{im}}{b^0_m}\log\left[1+\frac{\alpha_{SYM}(2M_X)}{4\pi}(R_m(2M_X)-R_m(\mu))\right]\pm(\Delta_i(K)-\Delta_j(K))\,, \tag{6.9a}$$

$$\tilde{F}_i(\mu)=\sum_{m=1}^{2}\frac{\tilde{b}^1_{im}}{\tilde{b}^0_m}\log\frac{1+(\alpha_{SYM}(2M_X)/4\pi)(R_m(2M_X)-R_m(\mu))}{1+(\alpha_{SYM}(2M_X)/4\pi)(R_m(2M_X)-R_m(2M_W))}\pm(\Delta_i(K)-\Delta_j(K))\,. \tag{6.9b}$$

$\tilde{b}^0_m$, $\tilde{b}^1_{im}$, $m=1,2$, are the symmetric β-function coefficients of $U(1)_{em}$ and $SU(3)_c$, respectively.

Supposing that the width K of the second-order threshold functions is of the same order of magnitude as in the first-order one $K\approx 10^2$, we then see that $\Delta_i(K)$ is about 10 times smaller than the second-order correction ($F_i(\mu)$) for small values of μ. Knowing now that the first-order term (R_i-R_j) is about 40 times bigger than the second-order one, we see that $\Delta_i(K)$ represents a correction of 2.5‰ to the formula given by eq. (6.8).

We note that the value of a coupling constant is given as [see also eq. (6.6b)]

$$\frac{4\pi}{\alpha_i(\mu)}=\frac{4\pi}{\alpha_{SYM}(2M_X)}+R^0_{SYM}(2M_X)-R^0_i(\mu)+\begin{cases}0, & \mu>2M_X\,,\\ F_i(\mu)\,, & 2M_W<\mu<2M_X\,,\\ F_i(2M_X)-\tilde{F}_i(\mu)\,, & \mu<2M_W\,.\end{cases} \tag{6.10}$$

We list here the R_i quantities as well as the symmetric β-function coefficients b^0_m,

b^1_{im}, $\tilde{b}^0_m$, $\tilde{b}^1_{im}$, $b^0_{\rm SYM}$ and $b^1_{\rm SYM}$:

$$R^0_{\rm SYM}(\mu)-R^0_{\rm SYM}(M_{\rm X})=b^0_{\rm SYM}\log\lambda_{\rm X}\,, \tag{6.11a}$$

$$R^0_{\rm G}(\mu)-R^0_{\rm SYM}(\mu)=2[\Phi(\lambda_{\rm X},\lambda_{\rm X})+{\rm A}(\lambda_{\rm X},0)]+3B(\lambda_8,\lambda_8)+B(\lambda_3,\lambda_3)+\tfrac{1}{2}C(\lambda_{\rm t})+\tfrac{1}{2}C(\lambda_{\rm b})\,, \tag{6.11b}$$

$$R^0_{\rm A}(\mu)-R^0_{\rm SYM}(\mu)=\tfrac{17}{4}[\Phi(\lambda_{\rm X},\lambda_{\rm X})+A(\lambda_{\rm X},0)]+\tfrac{3}{4}[\Phi(\lambda_{\rm W},\lambda_{\rm W})+A(\lambda_{\rm W},0)]+\tfrac{3}{4}B(\lambda_4,\lambda_4)+\tfrac{1}{4}B(\lambda_3,\lambda_3)+\tfrac{1}{2}C(\lambda_{\rm t})+\tfrac{1}{2}C(\lambda_{\rm b})\,, \tag{6.11c}$$

$$R^0_{\rm W}(\mu)-R^0_{\rm SYM}(\mu)=3[\Phi(\lambda_{\rm X},\lambda_{\rm X})+A(\lambda_{\rm X},0)]+\tfrac{5}{4}\Phi(\lambda_{\rm W},\lambda_{\rm Z})+\tfrac{3}{4}\Phi(\lambda_{\rm W},0)+\tfrac{9}{64}A(\lambda_{\rm Z},0)+A(\lambda_{\rm W},\lambda_5)+2B(\lambda_4,\lambda_4)+\tfrac{1}{2}B(\lambda_5,0)+\tfrac{3}{4}C(\lambda_{\rm t},\lambda_{\rm b})+\tfrac{1}{4}C(\lambda_b,0)\,, \tag{6.11d}$$

$$R^0_{\rm Z}(\mu)-R^0_{\rm SYM}(\mu)=\tfrac{15}{4}[\Phi(\lambda_{\rm X},\lambda_{\rm X})+A(\lambda_{\rm X},0)]+\tfrac{5}{4}\Phi(\lambda_{\rm W},\lambda_{\rm W})+\tfrac{9}{20}A(\lambda_{\rm W},0)+\tfrac{8}{5}A(\lambda_{\rm Z},\lambda_5)+\tfrac{3}{20}B(\lambda_3,\lambda_3)+\tfrac{5}{4}B(\lambda_4,\lambda_4)+\tfrac{4}{5}B(\lambda_5,0)+\tfrac{3}{10}C(\lambda_{\rm t})+\tfrac{1}{2}C(\lambda_{\rm b})\,, \tag{6.11e}$$

where the threshold functions Φ, B, C, A are defined in sect. 5 and are given in appendix B. The first and second fermion generations have been considered massless.

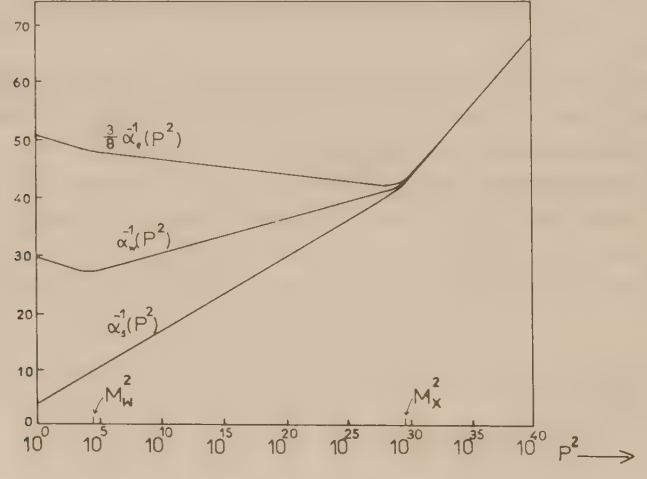


Fig. 7. Plot of the effective coupling constants $\alpha_{\rm A}^{-1}$, $\alpha_{\rm w}^{-1}$, $\alpha_{\rm s}^{-1}$ in the region $p^2=10^0-10^{40}\,({\rm GeV})^2$.

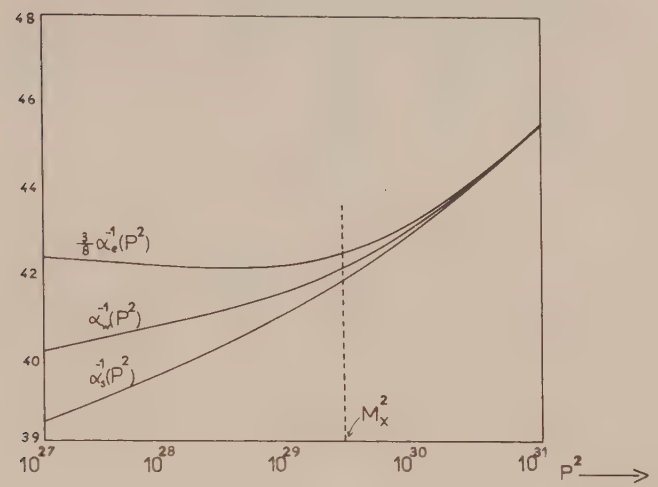


Fig. 8. Plot of the effective coupling constants α_A^{-1}, α_w^{-1}, α_s^{-1} in the M_X energy region $p^2 = 10^{27} - 10^{31}\,(\mathrm{GeV})^2$.

The behaviour of the coupling constants α_s^{-1}, α_w^{-1}, $\alpha_A^{-1} \equiv (\frac{8}{3}\alpha_e)^{-1}$ is represented in fig. 7 over the whole range of energy scale. In fig. 8 we plot them in the M_X energy region to show how different the $\alpha_i(M_X)$ are.

Here we list the symmetric β-functions of $SU(5)^{SYM}$ ($\mu > M_X$), $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$ ($M_W < \mu < M_X$) and $SU(3)_c \times U(1)^{em}$ ($\mu < M_W$).

(i) $SU(5)^{SYM}$, $\mu > M_X$:

$$b^0_{SYM} = -\tfrac{55}{3} + \tfrac{4}{3}N_F + \tfrac{5}{6}N_\phi + \tfrac{1}{6}N_H\,, \tag{6.12a}$$

$$b^1_{SYM} = -\tfrac{850}{3} + \tfrac{698}{3}N_F + \tfrac{175}{3}N_\phi + \tfrac{169}{15}N_H\,, \tag{6.12b}$$

N_F: number of fermion generations, N_ϕ: number of adjoint Higgs representations, N_H: number of fundamental Higgs representations.

(ii) $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)$, $M_W < \mu < M_X$:

$$b^0_1 = \tfrac{4}{3}N_F + \tfrac{1}{10}N_H\,, \tag{6.13a}$$

$$b^0_2 = \tfrac{4}{3}N_F + \tfrac{1}{6}N_H - \tfrac{22}{3}\,, \tag{6.13b}$$

$$b^0_3 = \tfrac{4}{3}N_F - 11\,; \tag{6.13c}$$

$$b^0_A = \tfrac{5}{8}b^0_1 + \tfrac{3}{8}b^0_2 = \tfrac{4}{3}N_F + \tfrac{1}{8}N_H - \tfrac{11}{4}\,, \tag{6.14a}$$

$$b^0_Z = \tfrac{3}{8}b^0_1 + \tfrac{5}{8}b^0_2 = \tfrac{4}{3}N_F + \tfrac{17}{120}N_H - \tfrac{55}{12}\,, \tag{6.14b}$$

$$b^0_W = b^0_2 = \tfrac{4}{3}N_F + \tfrac{1}{6}N_H - \tfrac{22}{3}\,, \tag{6.14c}$$

$$b^0_G = b^0_3 = \tfrac{4}{3}N_F - 11\,; \tag{6.14d}$$

$$\begin{bmatrix} b^1_{11} & b^1_{12} & b^1_{13} \\ b^1_{21} & b^2_{22} & b^1_{23} \\ b^1_{31} & b^1_{32} & b^1_{33} \end{bmatrix} = N_F \begin{bmatrix} \frac{19}{15} & \frac{3}{5} & \frac{44}{15} \\ \frac{1}{5} & \frac{49}{3} & 4 \\ \frac{11}{30} & \frac{3}{2} & \frac{76}{3} \end{bmatrix} + N_H \begin{bmatrix} \frac{9}{50} & \frac{9}{10} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{13}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{136}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -102 \end{bmatrix}; \tag{6.15}$$

$$(b^1_{A1}, b^1_{A2}, b^1_{A3}) = N_F(\tfrac{13}{15}, \tfrac{13}{2}, \tfrac{10}{3}) + N_H(\tfrac{9}{40}, \tfrac{11}{8}, 0) + (0, -17, 0), \tag{6.16a}$$

$$(b^1_{A1} - b^1_{G1}, b^1_{A2} - b^1_{GS}, b^1_{A3} - b^1_{G3}) = N_F(\tfrac{1}{2}, 5, -22) + N_H(\tfrac{9}{40}, \tfrac{11}{8}, 0) + (0, -17, 102), \tag{6.16b}$$

$$(b^1_{W1} - b^1_{A1}, b^1_{W2} - b^1_{A2}, b^1_{W3} - b^1_{A3}) = N_F(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{59}{6}, \tfrac{2}{3}) + N_H(\tfrac{3}{40}, \tfrac{19}{24}, 0) + (0, -\tfrac{85}{3}, 0). \tag{6.16c}$$

(iii) $SU(3)_c \times U(1)_e$, $\mu < M_W$:

$$b^0_A = \tfrac{1}{6}(4n_u + n_d + 3n_e), \tag{6.17a}$$

$$b^0_G = \tfrac{2}{3}(n_u + n_d) - 11; \tag{6.17b}$$

$$\begin{bmatrix} b^1_{AA} & b^1_{GA} \\ b^1_{AG} & b^1_{GG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{48}(16n_u + n_d + 27n_e) & \frac{1}{12}(4n_u + n_d) \\ \frac{2}{3}(4n_u + n_d) & \frac{38}{3}(n_u + n_d) - 102 \end{bmatrix}. \tag{6.18}$$

n_u: up-type quarks, n_d: down-type quarks, n_e: electron-type leptons.

7. M_X determination

In a previous paper [14] we gave the value of the superheavy vector boson mass M_X. The starting point of the M_X determination is the relation between the different definitions of the renormalized gauge coupling constant. Let us, for instance, examine the relation between the strong and the electromagnetic coupling constant [$\alpha_s \equiv \alpha_G$, $\alpha_e \equiv \frac{3}{8}\alpha_A$, eq. (6.8)]

$$\frac{4\pi}{\alpha_s(\mu)} - \frac{3}{8}\frac{4\pi}{\alpha_e(\mu)} = -R_G(\mu) + R_A(\mu) + F_G(\mu) - F_A(\mu). \tag{7.1}$$

R_G, R_A represent the exact one-loop contribution and F_G, F_A the two-loop correction as explained in sect. 6.

R_G and R_A are given in terms of the threshold functions Φ, B, C and A [eq. (6.11b, c)] and one observes that their difference is fermion independent:

$$-R_G(\mu) + R_A(\mu) = \tfrac{9}{4}[\Phi(\lambda_X, \lambda_X) + A(\lambda_X, 0)] + \tfrac{3}{4}[\Phi(\lambda_W, \lambda_W) + A(\lambda_W, 0)] - 3B(\lambda_8, \lambda_8) + \tfrac{3}{4}B(\lambda_4, \lambda_4) - \tfrac{3}{4}B(\lambda_3, \lambda_3). \tag{7.2a}$$

In the case where $\mu \ll M_X$, $(\lambda_X, \lambda_8, \lambda_4, \lambda_3 \gg 1)$, the functions containing the large

scales behave logarithmically plus a constant term [see eqs. (5.24)–(5.27)] and one has

$$-R_G(\mu)+R_A(\mu)=-\tfrac{67}{8}\log\frac{M_X^2}{\mu^2}-\tfrac{193}{48}-\tfrac{1}{4}\log\frac{a_3a_8^4}{a_4}+\tfrac{3}{4}[\Phi(\lambda_W,\lambda_W)$$
$$+A(\lambda_W,0)]\,,\qquad \mu\ll M_X\,, \tag{7.2b}$$

where $a_i=M_i/M_X$ and $a_4=2a_8$ [eq. (2.26)].

In the more particular case where $\mu\ll M_W$ all functions can be taken as asymptotic and eq. (7.2a) becomes

$$-R_G(\mu)+R_A(\mu)=-\tfrac{67}{8}\log\frac{M_X^2}{\mu^2}-\tfrac{87}{16}-\tfrac{1}{4}\log\frac{a_3a_8^4}{a_4}-\tfrac{21}{8}\log\frac{M_W^2}{\mu^2}\,. \tag{7.2c}$$

As we explained in the previous section, it is a good approximation to derive $F_G(\mu)$ and $F_A(\mu)$ using the decoupling theorem (see sect. 6). Integrating by steps the second-order term of eq. (6.9) one can write $F_G(\mu)-F_A(\mu)$ in the case where we consider three fermion families, as

$$F_G(\mu)-F_A(\mu)=\log\Pi(\mu,2m_b)\Pi(2m_b,2m_t)\Pi(2m_t,2M_W)\Pi(2M_W,2M_X)\,, \tag{7.3a}$$

if

$$\mu\leqslant 2m_b<2m_t<2M_W=2M_5<2M_X=2M_3=2M_8=M_4\,, \tag{7.3b}$$

and

$$F_G(\mu)-F_A(\mu)=\log\Pi(\mu,2M_X)\,, \tag{7.3c}$$

if

$$2m_b<2m_t<2M_W=2M_5\leqslant\mu\leqslant 2M_X=2M_3=2M_8=M_4\,. \tag{7.3d}$$

$\Pi(m_1,m_2)$ is given as

$$\Pi(m_1,m_2)=\left(\frac{\alpha_s(m_2)}{\alpha_s(m_1)}\right)^{\gamma_s(m_1,m_2)}\left(\frac{\alpha_e(m_2)}{\alpha_e(m_1)}\right)^{\gamma_A(m_1,m_2)}\,,\qquad m_1,m_2<M_W\,, \tag{7.4a}$$

$$\Pi(m_1,m_2)=\left(\frac{\alpha_s(m_2)}{\alpha_s(m_1)}\right)^{\gamma_3(m_1,m_2)}\left(\frac{\alpha_2(m_2)}{\alpha_2(m_1)}\right)^{\gamma_2(m_1,m_2)}\left(\frac{\alpha_1(m_2)}{\alpha_1(m_1)}\right)^{\gamma_1(m_1,m_2)}\,,\quad m_1,m_2>M_W\,, \tag{7.4b}$$

with

$$\gamma_s(m_1,m_2)=\frac{b^1_{GG}-b^1_{AG}}{b^0_G}\,, \tag{7.5a}$$

$$\gamma_A(m_1,m_2)=\frac{b^1_{GA}-b^1_{AA}}{b^0_A}\,, \tag{7.5b}$$

$$\gamma_i(m_1, m_2) = \frac{b^1_{Gi} - b^1_{Ai}}{b^0_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{7.5c}$$

b^0_G, b^0_A, b^0_i, b^1_{GG}, b^1_{AG}, b^1_{GA}, b^1_{AA}, b^1_{Gi}, b^1_{Ai} are given in sect. 6 by eqs. (6.13)–(6.18) and are evaluated at an energy scale between m_1 and m_2.

Contrary to the one-loop contribution $-R_G + R_A$, the two-loop one $F_G - F_A$ depends on the third fermion family masses m_b and m_t. From eqs. (7.1), (7.2) and (7.4) one obtains the following equation for M_X:

$$M_X \underset{\mu \sim M_X}{=} \mu f(\mu) \exp \frac{4}{67}\left[\frac{3}{8}\frac{4\pi}{\alpha_e(\mu)} - \frac{4\pi}{\alpha_s(\mu)} + \tfrac{3}{4}(\Phi(\lambda_W) + A(\lambda_W, 0)) - \tfrac{193}{48} - \tfrac{1}{4}\log\frac{a_3 a_8^4}{a_4}\right], \tag{7.6a}$$

$$M_X \underset{\mu \sim M_W}{=} \mu f(\mu) \exp \frac{4}{67}\left[\frac{3}{8}\frac{4\pi}{\alpha_e(\mu)} - \frac{4\pi}{\alpha_s(\mu)} - \tfrac{21}{4}\log\frac{M_W}{\mu} - \tfrac{87}{16} - \tfrac{1}{4}\log\frac{a_3 a_8^4}{a_4}\right], \tag{7.6b}$$

where $f(\mu)$ is given as

$$f(\mu) = \exp \tfrac{4}{67}[F_G(\mu) - F_A(\mu)]. \tag{7.7}$$

It is easy to verify that M_X given by eqs. (7.6a, b) is μ independent:

$$\mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \log M_X^2 = 0. \tag{7.8}$$

To determine M_X one needs $\alpha_e(\mu)$ and $\alpha_s(\mu)$ as well as all the mass parameters appearing in formulae (7.3b) or (7.3d). $\alpha_e(\mu)$ can be determined from the experimental data on $\sigma(e^+e^- \to \text{anything})$ using the dispersion relation. The value of $\alpha_s(\mu)$ is given by the second-order QCD formula as a function of $\Lambda_{\overline{MS}}$ which parametrizes the deep inelastic scaling violation of structure functions, in the energy range $2m_c < \mu < 2m_b$. Both $\alpha_e(\mu)$ and $\alpha_s(\mu)$ determined from the data [27, 28] must be expressed in our renormalization prescription. Let us denote by $\alpha_e(\mu_0)$ and $\alpha_s(\mu_0)$ the values of the electromagnetic and strong coupling constant at a point μ_0 such that the second order $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ theory (two-loop) parametrize the experimental data. (μ_0 is sufficiently large that the strong corrections to electromagnetism are calculable perturbatively). Then $\alpha_e(\mu_0)$ and $\alpha_s(\mu_0)$ differ by a finite renormalization from $\alpha_e^D(\mu_0)$ calculated in the dispersion relation scheme [28] and $\alpha_s^{\overline{MS}}(\mu_0)$ calculated in the $\overline{MS}$ scheme [27],

$$\frac{3}{8}\frac{4\pi}{\alpha_e(\mu_0)} - \frac{3}{8}\frac{4\pi}{\alpha_e^D(\mu_0)} = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N_f - N_\ell} Q_i^2\left(-1 + 6\lambda_i - 12\frac{\lambda_i^2}{\sqrt{1+4\lambda_i}}\log\frac{\sqrt{1+4\lambda_i}+1}{\sqrt{1+4\lambda_i}-1}\right)$$
$$- \frac{b^1_{AA}}{b^0_A}\log\frac{\alpha_e^D(\mu_0)}{\alpha_e(\mu_0)} + \frac{b^1_{AG}}{b^0_G}\log\frac{\alpha_s^{\overline{MS}}(\mu_0)}{\alpha_s(\mu_0)}, \tag{7.9a}$$

$$\frac{4\pi}{\alpha_s(\mu_0)}-\frac{4\pi}{\alpha_s^{\overline{MS}}(\mu_0)}=-\tfrac{1}{36}(219-16N_f)-\sum_{i=1}^{N_f}\tfrac{2}{3}C(\lambda_i)$$

$$+\frac{b^1_{GA}}{b^0_A}\log\frac{\alpha_e^D(\mu_0)}{\alpha_e(\mu_0)}+\frac{b^1_{GG}}{b^0_G}\log\frac{\alpha_s^{\overline{MS}}(\mu_0)}{\alpha_s(\mu_0)}. \tag{7.9b}$$

Iterating these equations one can see that

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\frac{4\pi}{\alpha_e(\mu_0)}\\ \frac{4\pi}{\alpha_s(\mu_0)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{8}\frac{4\pi}{\alpha_e^D(\mu_0)}\\ \frac{4\pi}{\alpha_s^{\overline{MS}}(\mu_0)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}M_{AA} & M_{AG}\\ M_{GA} & M_{GG}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1/b^0_A\\ A_2/b^0_G\end{bmatrix}, \tag{7.10}$$

where

$$M_{AA}=b^0_A+b^1_{AA}\frac{\alpha_A^D(\mu_0)}{4\pi},\qquad M_{AG}=b^1_{AG}\frac{\alpha_G^{\overline{MS}}(\mu_0)}{4\pi}, \tag{7.11a}$$

$$M_{GA}=b^1_{GA}\frac{\alpha_A^D(\mu_0)}{4\pi},\qquad M_{GG}=b^0_G+b^1_{GG}\frac{\alpha_G^{\overline{MS}}(\mu_0)}{4\pi}, \tag{7.11b}$$

where

$$A_1(\mu_0)=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3N_f+N_e}Q_i^2\left(-1+6\lambda_i-12\frac{\lambda_i^2}{\sqrt{1+4\lambda_i}}\log\frac{\sqrt{1+4\lambda_i}+1}{\sqrt{1+4\lambda_i}-1}\right), \tag{7.12a}$$

$$A_2(\mu_0)=-\tfrac{1}{36}(219-16N_f)-\sum_{i=1}^{N_f}\tfrac{2}{3}C(\lambda_i). \tag{7.12b}$$

Choosing μ_0 in the interval of $2m_c<\mu_0<2m_b$ one can write $\alpha_s^{\overline{MS}}(\mu_0)$ as function of $\Lambda_{\overline{MS}}$:

$$\frac{4\pi}{\alpha_s^{\overline{MS}}(\mu_0)}=-b^0_G\log\frac{\mu_0^2}{\Lambda^2_{\overline{MS}}}+\frac{b^1_{GG}}{b^0_G}\log\log\frac{\mu_0^2}{\Lambda^2_{\overline{MS}}}. \tag{7.13}$$

We can then express M_X as function of $\alpha_e^D(\mu_0)$ and $\alpha_{\overline{MS}}(\mu_0)$ which are experimentally given using eqs. (7.6b) and (7.10):

$$M_X=\mu_0 f'(\mu_0)\exp\frac{4}{67}\left[\frac{3}{8}\frac{4\pi}{\alpha_e^D(\mu_0)}-\frac{4\pi}{\alpha_{\overline{MS}}(\mu_0)}+A_1(\mu_0)-A_2(\mu_0)\right.$$

$$\left.-\tfrac{21}{4}\log\frac{M_W}{\mu_0}-\tfrac{87}{16}-\tfrac{1}{4}\log\frac{a_3a_8^4}{a_4}\right]. \tag{7.14}$$

A_1, A_2 are given by eqs. (7.12a, b) and $f'(\mu_0)$ is

$$f'(\mu_0)=\left(\frac{\alpha_s(2m_b)}{\alpha_{\overline{MS}}(\mu_0)}\right)^{\delta_s(\mu_0/2,m_b)}\left(\frac{\alpha_s(2m_t)}{\alpha_s(2m_b)}\right)^{\delta_s(m_b,m_t)}\left(\frac{\alpha_s(2M_X)}{\alpha_s(2m_t)}\right)^{\delta_s(m_t,M_X)}$$

$$\times\left(\frac{\alpha_2(2M_X)}{\alpha_2(2M_W)}\right)^{\delta_2(M_W,M_X)}\left(\frac{\alpha_1(2M_X)}{\alpha_1(2M_W)}\right)^{\delta_1(M_W,M_X)}, \tag{7.15a}$$

with

$$\delta_i = \tfrac{4}{67}\gamma_i = \frac{4}{67}\,\frac{b^1_{Gi} - b^1_{\Lambda i}}{b^0_i}\,. \tag{7.15b}$$

From eq. (7.14) one can determine M_X given $\alpha_e^D(\mu_0)$ and $\alpha_{\overline{MS}}(\mu_0)$. We choose $\Lambda_{\overline{MS}} = 0.2$ which is the present favoured value [27] and $\alpha_e^D(3\,\text{GeV}) = 1/133.3$; then we obtain the central value for M_X^c

$$M_X^c = 3.1 \times 10^{14}\,\text{GeV}\,. \tag{7.16}$$

Taking the derivative with respect to $\Lambda_{\overline{MS}}$ of $\log M_X$,

$$\Lambda_{\overline{MS}}\,\frac{\partial}{\partial \Lambda_{\overline{MS}}}\log M_X = \tfrac{200}{201}[1 + 0.08\alpha_s(2m_b) + 0.06\alpha_s(2m_t) + 0.34\alpha_s(2M_X)]$$

$$= 1.03\,. \tag{7.17}$$

This implies that

$$M_X = 3.1\left(\frac{\Lambda_{\overline{MS}}}{0.2}\right)^{1.03} \times 10^{14}\,\text{GeV}\,. \tag{7.18}$$

Let us come now to the uncertainties that appear to the M_X determination.

(i) $\alpha_{\overline{MS}}$ uncertainties, $\Lambda_{\overline{MS}}$: In eq. (7.18) one can see that M_X is very sensitive to the $\Lambda_{\overline{MS}}$ value.

(ii) α_e^D uncertainties $\delta(\alpha_e^D)^{-1} = \pm 0.5$.

$$M_X = M_X^c \exp \pm 0.28\delta(\alpha_e^D)^{-1} = M_X^c(1 \pm 0.15)\,. \tag{7.19}$$

(iii) M_W uncertainties:

$$M_X = M_X^c\left(\frac{M_X}{85}\right)^{-0.31} \sim M_X^c(1 \pm 0.04) \qquad \text{when } 75 < M_W < 95\,. \tag{7.20}$$

(iv) Second-order step approximation (width K):

$$M_X = M_X^c(K)^{\pm 0.01} = M_X^c(1 \pm 0.05)\,, \qquad \text{for } K = 10^{\pm 2}\,. \tag{7.21}$$

(v) Superheavy Higgs masses M_3, M_8:

$$\begin{aligned} &M_X = M_X^c(a_3 a_8^3)^{-1/67}, \qquad a_i = M_i/M_X\,, \\ &M_X = M_X^c(1 \pm 0.5)\,, \qquad 10^{-3} < a_i < 10^{+3}\,. \end{aligned} \tag{7.22}$$

(vi) Third fermion family masses m_t:

$$M_X = M_X^c\left(\frac{\alpha_s(2m_t)}{\alpha_s(2m_t^0)}\right)^{0.05} \simeq M_X^c\left(1 - 0.004\log\frac{m_t}{20}\right). \tag{7.23}$$

(vii) Fourth fermion family $M_T \simeq M_B \simeq M_L$:

$$M_X = M_X^c\left(\frac{\alpha_s(M_X)}{\alpha_s(M_T)}\right)^{-0.16}. \tag{7.24}$$

If $M_T \approx 85$ GeV then the correction is 1.3. One observes that in the case where we have another fermion family the M_X value changes by a maximum factor 1.3.

(viii) $\bar{5}$ Higgs mass M_5

$$M_X = M_X^c \left(\frac{\alpha_2(2M_5)}{\alpha_2(2M_W)}\right)^{0.024} \left(\frac{\alpha_1(2M_5)}{\alpha_1(2M_W)}\right)^{0.003} \simeq M_X^c \left(1 + 0.0005 \log \frac{M_5}{85}\right). \quad (7.25)$$

All the uncertainties can be expressed in a single form

$$M_X = 3.1 \left(\frac{\Lambda_{\overline{MS}}}{0.2}\right)^{1.03} \exp 0.28\,((\alpha_e^D)^{-1} - 133.3)\left[1 - 0.004 \log \frac{m_t}{20}\right.$$

$$\left. + 0.0005 \log \frac{M_5}{85} - 0.015 \log a_3 a_8^3 - 0.31 \log \frac{M_W}{85} + 0.01 \log K\right]. \quad (7.26)$$

8. $\sin^2 \theta_W$ determination

$\sin^2 \theta_W$ is introduced to define the photon (massless gauge boson) and the Z-vector boson (the massive one) instead of the initial non-physical gauge bosons W_3 and B associated to the $SU(2)_L$ and $U(1)$ subgroups. In sect. 2, working at the tree approximation level we saw that $\sin^2 \theta_0 = \frac{3}{8}$ [eq. (3.14)]. The bare value θ_0 changes order by order in perturbation as we explained in sect. 3, in order to redefine the renormalized photon as the gauge boson which corresponds to $U(1)_{em}$ and couples to the conserved electromagnetic current. The extra rotation $\theta_{\gamma Z} - \theta_0$ is finite to all orders in perturbation and is given by eq. (3.22). It is clear that $\sin \theta_{\gamma Z}(\mu)$ contains large logarithms in the perturbative expansion in powers of g_A. So one needs a renormalization group argument in order to derive $\sin^2 \theta_{\gamma Z}(\mu)$. This can be done easily using the formalism developed in the previous sections. Defining the SU(5) renormalized gauge coupling constant $g_{\gamma Z}$ with the finite renormalization.

$$g_{\gamma Z} = g_A Z_{\gamma Z}(g_A), \quad (8.1)$$

and choosing $Z_{\gamma Z}^{-1}(g_A)$ to be the perturbative expansion of $\sin^2 \theta_{\gamma Z}/\sin^2 \theta_0$ which has a finite coefficient (see sect. 3),

$$Z_{\gamma Z}^{-1}(g_A) = \frac{\sin^2 \theta_{\gamma Z}}{\sin^2 \theta_0} = 1 + \frac{g_A^2}{(4\pi)^2} R_{\gamma Z} + \left(\frac{g_A^2}{(4\pi)^2}\right)^2 R_{\gamma Z}^1 + \cdots, \quad (8.2)$$

one then can relate the two definitions $g_{\gamma Z}$ and g_A using the solution of the differential equation. Using now the fact that the running $\sin^2 \theta_{\gamma Z}(\mu)$ is given by

$$\sin^2 \theta_{\gamma Z}(\mu) \equiv s_{\gamma Z}^2(\mu) = s_0^2 \frac{g_A^2(\mu)}{g_{\gamma Z}^2(\mu)}, \quad (8.3)$$

one obtains

$$s_{\gamma Z}^2(\mu) = \frac{3}{8} + \frac{\alpha_e(\mu)}{4\pi}[R_{\gamma Z} + F_{\gamma Z}], \quad (8.4a)$$

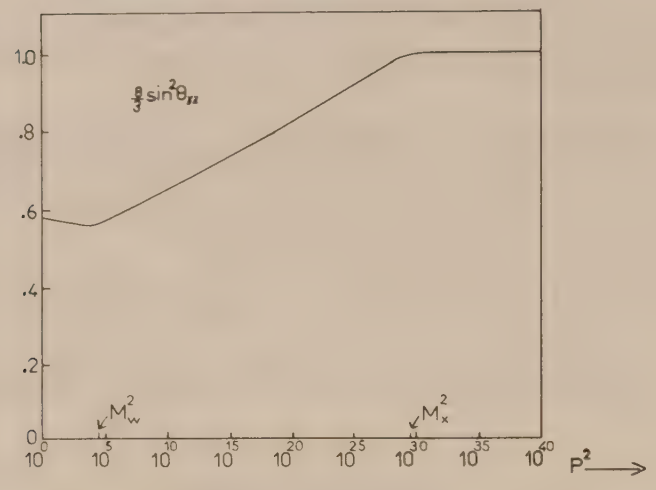


Fig. 9. Plot of $\sin^2\theta_{\gamma Z}$ in the region $p^2 = 10^0 - 10^{40}\ (\mathrm{GeV})^2$.

which is plotted in fig. 9. $R_{\gamma Z}(\mu)$ is the one-loop contribution

$$R_{\gamma Z}(\mu) = -\tfrac{5}{4}[\Phi(\lambda_X, \lambda_X) + A(\lambda_X, 0) - \Phi(\lambda_W, \lambda_W) - A(\lambda_W, 0) + \tfrac{1}{5}B(\lambda_3, \lambda_3) - B(\lambda_4, \lambda_4) + \tfrac{8}{5}\tilde{A}(\lambda_W, 0)], \tag{8.4b}$$

with*

$$\tilde{A}(\lambda_W, 0) = -\tfrac{5}{6}\lambda + \tfrac{1}{6}\lambda^2 + \tfrac{1}{12}\log\lambda + \tfrac{1}{12}(1 + 9\lambda^2 - 2\lambda^3)\log\frac{1+\lambda}{\lambda}. \tag{8.4c}$$

$F_{\gamma Z}(\mu)$ is the two-loop correction. As explained in sect. 6 we calculate the two-loop correction using the decoupling theorem and the step approximation. Because of the definition of $g_{\gamma Z}^2 = e^2/\sin^2\theta_{\gamma Z}$ it is straightforward to see that the decoupling properties of the $\beta_{\gamma Z}(g_{\gamma Z}) \equiv \mu^2(\partial/\partial\mu^2)g_{\gamma Z}$ are the same as β_W in the limit where $M_W < \mu < M_X$ [see eq. (5.2b)]. This implies that

$$F_{\gamma Z}(\mu) = F_W(\mu) - F_A(\mu). \tag{8.5}$$

For this reason one expects that the quantity s_W^2 defined as

$$s_W^2(\mu) = s_0^2\frac{g_A^2(\mu)}{g_W^2(\mu)} = \frac{e^2(\mu)}{g_W^2(\mu)} \tag{8.6}$$

* In fact in the case of $\sin^2\theta_{\gamma Z}$, instead of $\Gamma_T(p^2)$, to define $\Pi(p^2)$ [see eq. (3.9b)] we use the sum $(\Gamma_T(p^2) + \Gamma_L(p^2))$ that appears in the decomposition of the two-point irreducible function $\Gamma^{\mu\nu} = (g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu/p^2)(\Gamma_T + \Gamma_L) + (p^\mu p^\nu/p^2)\Gamma_L$. This is more natural for the definition of $\sin^2\theta_w$ because both Γ_T and Γ_L contribute to the three-point reducible Green function. For this reason, instead of $A(\lambda, 0)$ a different threshold function appears, i.e. the $\tilde{A}(\lambda, 0)$ given in eq. (8.4c).

For the definition of the electromagnetic and the strong coupling constants the two possible decompositions become the same because, as expected from the Ward identities, we find $\Gamma_L^{GG}(p^2) = \Gamma_L^{AA}(p^2) = 0$. This is not the case for $\Gamma_L^{ZZ}(p^2)$ and $\Gamma_L^{WW}(p^2)$.

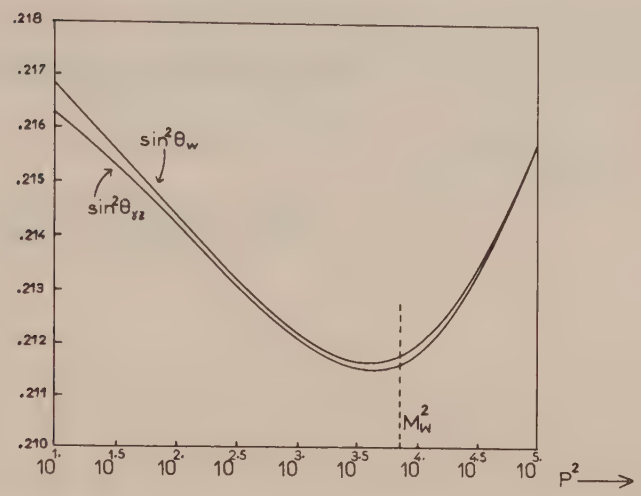


Fig. 10. Comparison of two definitions of the weak angle $\sin^2\theta_w = \alpha_e/\alpha_w$ and $\sin^2\theta_{\gamma Z}$ in the region $p^2 = 10^1 - 10^5\ (\mathrm{GeV})^2$.

will be very similar to $s^2_{\gamma Z}(\mu)$. In fact if one neglects the SU(2) × U(1) breaking then

$$s^2_{\gamma Z}(\mu) = s^2_W(\mu)\,, \qquad M_W/\mu \to 0\,. \tag{8.7}$$

For μ smaller than M_W, $s^2_{\gamma Z}(\mu)$ and $s^2_W(\mu)$ are slightly different (5‰ at $\mu \simeq 3$ GeV) as can be seen in fig. 10. The difference $\Delta(\mu) = s^2_W(\mu) - s^2_{\gamma Z}(\mu)$ gives an order of magnitude of variation when we use several possible definitions of $\sin^2\theta_w$:

$$\begin{aligned}\Delta(\mu) = \frac{\alpha_e(\mu)}{4\pi}\big[&2\Phi(\lambda_W,\lambda_W) - \tfrac{5}{4}\Phi(\lambda_W,\lambda_Z) - \tfrac{3}{4}\Phi(\lambda_W,0) - \tfrac{1}{2}B(\lambda_5,0)\\ &- A(\lambda_W,\lambda_5) + 2A(\lambda_W,0) + \tfrac{9}{64}A(\lambda_Z,0) - 2\tilde{A}(\lambda_W,0)\\ &+ \tfrac{1}{2}C(\lambda_t,\lambda_t) + \tfrac{1}{2}C(\lambda_b,\lambda_b) - \tfrac{3}{4}C(\lambda_t,\lambda_b)\\ &- \tfrac{1}{4}C(\lambda_b,0)\big]\,.\end{aligned} \tag{8.8}$$

For $\mu \ll M_X$ one can use the asymptotic behaviour of the threshold functions and one can write eq. (8.4a) in the following form:

$$\begin{aligned}s^2_{\gamma Z}(\mu) \underset{\mu \ll M_X}{=} \frac{3}{8} - \frac{\alpha_e(\mu)}{4\pi}\Big[&\tfrac{109}{12}\log\frac{M_X}{\mu} + \tfrac{295}{144} - \tfrac{1}{12}\log\frac{a_4^5}{a_3}\\ &+ \tfrac{5}{4}(\Phi(\lambda_W,\lambda_W) + A(\lambda_W,0)) - 2\tilde{A}(\lambda_W,0) - F_{\gamma Z}(\mu)\Big]\end{aligned} \tag{8.9a}$$

and in the case where $\mu \ll M_W$

$$s^2_{\gamma Z}(\mu) \underset{\mu \ll M_W}{=} \frac{3}{8} - \frac{\alpha_e(\mu)}{4\pi}\Big[\tfrac{109}{12}\log\frac{M_X}{M_W} + \tfrac{41}{36} - \tfrac{1}{12}\log\frac{a_4^5}{a_3} - F_{\gamma Z}(\mu)\Big]\,. \tag{8.9b}$$

This value is exactly that of eq. (8.16)

$$s^2_{\gamma Z}(\sqrt{20}) = 0.2163 \pm 0.006 - 0.0056 \log \frac{\Lambda_{\overline{\rm MS}}}{0.2}. \tag{8.25}$$

Before we close this section we give the value of our calculation at $\mu = M_{\rm W}$, a value that is usually chosen in other calculations:

$$s^2_{\gamma Z}(M_{\rm W}) = 0.2132 \pm 0.001 - 0.0056 \log \frac{\Lambda_{\overline{\rm MS}}}{0.2}. \tag{8.26}$$

9. Conclusion

In this work we have performed the crossing of thresholds in a spontaneously broken gauge theory in an exact way. We have studied the threshold functions at the one-loop level and found that the decoupling of heavy particles could be approximated well enough with θ-functions. As an application we have calculated $M_{\rm X}$ and $\sin^2\theta_{\rm w}$ in SU(5) and we get the following numerical values:

$$M_{\rm X} = 3.1\left(\frac{\Lambda_{\overline{\rm MS}}}{0.2}({\rm GeV})\right)^{1.03} \times 10^{14}\ {\rm GeV}, \tag{9.1}$$

$$\sin^2\theta_{\rm w}(\mu) = \tfrac{3}{8} - 21.076\alpha^{\rm D}_{\rm em}(\mu) - 0.0056 \log \frac{\Lambda_{\overline{\rm MS}}}{0.2}. \tag{9.2}$$

$\Lambda_{\overline{\rm MS}}$ is the scale parameter of QCD with 4 flavours whose present favoured value is $\Lambda_{\overline{\rm MS}} = 0.16^{+0.1}_{-0.08}$ GeV [27]. $\alpha^{\rm D}_{\rm em}(\mu)$ is the value of the electromagnetic coupling constant at the scale μ which can be directly obtained from experimental data on the total cross section $e^+e^- \to \gamma \to$ hadrons using a dispersion relation [6, 28]. The weak angle $\sin\theta_{\rm w}(\mu)$ defined by the above formula is directly related to γ-Z mixing. But eq. (9.2) is strictly valid only in the limit $\mu \ll M_{\rm W}$. For $\mu = M_{\rm W} = 85$ GeV we get $\sin^2\theta_{\rm w}(M_{\rm W}) = 0.213 \pm 0.001$ for $\Lambda_{\overline{\rm MS}} = 0.2$ GeV. Our results for $M_{\rm X}$ and $\sin^2\theta_{\rm w}(M_{\rm W})$ agree with other calculations [6–13, 19, 22, 29]. Nothing prevents us from using the formula for $\sin^2\theta_{\rm w}(\mu)$ in the zero momentum limit where we get $\sin^2\theta_{\rm w}(0) = 0.221$ for $\Lambda_{\overline{\rm MS}} = 0.2$ GeV. But before any comparison to atomic physics experiments, further radiative corrections must be taken into account. These radiative corrections have been calculated by Marciano and Sirlin [23] for the ratio of total neutral and total charged current cross sections. They have extracted from all neutral current experiments an effective value $\sin^2\theta_{\rm w}$ at $\mu \approx \sqrt{20}$ GeV which can be compared with the SU(5) renormalization group prediction. Their value $\sin^2\theta_{\rm w}(20\ {\rm GeV}) = 0.216 \pm 0.010$ is in complete agreement with the SU(5) prediction when $\Lambda_{\overline{\rm MS}} = 0.2$ GeV.

We would like to thank C. Bouchiat and J. Iliopoulos for calling our attention to this problem and for fruitful discussions. We also thank M. Diaconiou for help in numerical computation.

One can then write an effective formula for $s^2_{\gamma Z}(\mu)$, $\mu \ll M_W$, using the M_X expression given by eq. (7.25) where Λ uncertainties appear explicitly:

$$s^2_{\gamma Z}(\mu) = \tfrac{3}{8} - \alpha_e^D(\mu) \times 21.076 - 0.0056 \log \frac{\Lambda_{\overline{MS}}}{0.2}. \tag{8.16}$$

The other uncertainties are the following:

(i) α_e uncertainties, $\alpha_e^{-1}(\mu) = \pm 0.5$:

$$\delta s^2_{\gamma Z}(\mu) = \mp 0.006 . \tag{8.17}$$

(ii) m_t uncertainties:

$$\delta s^2_{\gamma Z}(\mu) = 0.00002 \log \frac{m_t}{20}. \tag{8.18}$$

(iii) M_W uncertainties:

$$\delta s^2_{\gamma Z}(\mu) = 0.007 \log \frac{M_W}{85}. \tag{8.19}$$

(iv) M_5 uncertainties:

$$\delta s^2_{\gamma Z}(\mu) = -0.000005 \log \frac{M_5}{85}. \tag{8.20}$$

(v) Superheavy Higgs uncertainties:

$$\delta s^2_{\gamma Z}(\mu) = 0.0003 \log \frac{M_3}{M_X} + 0.0005 \log \frac{M_8}{M_X}. \tag{8.21}$$

(vi) Second-order step approximation (width K):

$$\delta s^2_{\gamma Z}(\mu) = 0.0001 \log K . \tag{8.22}$$

(vii) 4th fermion family with mass scales $M_T = M_B = M_L$:

$$\delta s^2_{\gamma Z}(\mu) = 0.0009 \log \frac{\alpha_s(M_X)}{\alpha_s(M_T)}. \tag{8.23}$$

If there is a 4th fermion family, $s^2_{\gamma Z}(\mu)$ decreases and the variation can be as much as 0.0014 if $M_T \approx M_W$.

In recent experiments, experimentalists parametrized their results with the tree approximation formulas. It is well known that the radiative corrections depend on the process. For this reason one must be careful before comparing their values with the SU(5) predicted value given by eq. (8.14a). Recently Marciano and Sirlin [23] have calculated these radiative corrections and they derive the mean $\sin^2 \theta_w$ which is directly comparable with the SU(5) prediction. This value is equal to

$$\sin^2 \theta_w^{exp} = 0.216 \pm 0.010 , \quad \text{at } \mu = \sqrt{20}\ \text{GeV} . \tag{8.24}$$

Observe that in the case where $\mu \ll M_W$ the μ dependence of $s^2_{\gamma Z}(\mu)$ comes only from $\alpha_e(\mu)$. (We will see that the second-order correction $F_{\gamma Z}(\mu)$ is very small). There is no logarithmic behaviour for the small values of μ. As in the case of the M_X determination, $\alpha_e(\mu)$ is not directly the quantity taken from the experimental data, $\alpha_e^D(\mu)$:

$$\frac{\alpha_e(\mu_0)}{4\pi} = \frac{\alpha_e^D(\mu_0)}{4\pi} - \frac{8}{3}\left(\frac{\alpha_e^D(\mu_0)}{4\pi}\right)^2 [A_1(\mu_0)], \tag{8.10}$$

where $A_1(\mu_0)$ is given by eq. (7.12a) and

$$F_{\gamma Z}(\mu_0) = \log \Pi_{\gamma Z}(\mu_0, 2m_b)\Pi_{\gamma Z}(2m_b, 2m_t)\Pi_{\gamma Z}(2m_t, 2M_W)\Pi_{\gamma Z}(2M_W, 2M_X), \tag{8.11}$$

where

$$\Pi_{\gamma Z}(m_1, m_2) = \left(\frac{\alpha_s(m_2)}{\alpha_s(m_1)}\right)^{\xi_s(m_1,m_2)} \left(\frac{\alpha_e(m_2)}{\alpha_e(m_1)}\right)^{\xi_A(m_1,m_2)}, \qquad m_1, m_2 < 2M_W, \tag{8.12a}$$

$$\Pi_{\gamma Z}(m_1, m_2) = \left(\frac{\alpha_3(m_2)}{\alpha_3(m_1)}\right)^{\xi_3(m_1,m_2)} \left(\frac{\alpha_2(m_2)}{\alpha_2(m_1)}\right)^{\xi_2(m_1,m_2)} \left(\frac{\alpha_1(m_2)}{\alpha_1(m_1)}\right)^{\xi_1(m_1,m_2)},$$

$$2M_W \leq m_1, m_2 < 2M_X, \tag{8.12b}$$

with

$$\xi_s(m_1, m_2) = -\frac{b^1_{AG}}{b^0_G}, \tag{8.13a}$$

$$\xi_A(m_1, m_2) = -\frac{b^1_{AA}}{b^0_A}, \tag{8.13b}$$

$$\xi_i(m_1, m_2) = \frac{b^1_{Wi} - b^1_{Ai}}{b^0_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{8.13c}$$

b^0_A, b^0_G, b^0_i, b^1_{AG}, b^1_{AA}, b^1_{Wi}, b^1_{Ai} are given by eqs. (6.13)–(6.18) and are evaluated at an energy scale between m_1, m_2.

Choosing $\mu_0 = 3$ GeV and $\alpha_e^D(\mu_0) = 1/133.3$ and $M_X = 3.1 \times 10^{14}$ one obtains

$$s^2_{\gamma Z}(3\text{ GeV}) = 0.2169, \qquad \Lambda_{\overline{MS}} = 0.2\text{ GeV}. \tag{8.14a}$$

Comparing with the value of $s^2_W(3\text{ GeV})$ in ref. [14],

$$s^2_W(3\text{ GeV}) = 0.217, \qquad \Lambda_{\overline{MS}} = 0.22\text{ GeV}, \tag{8.14b}$$

we conclude that different definitions of $\sin^2\theta_w$ do not change the SU(5) prediction too much. The second-order explicit contribution coming from $F_{\gamma Z}(\mu_0)$ is very small,

$$\Delta s^2_{\gamma Z} = -0.0002. \tag{8.15}$$

Appendix A

We here explain why the definition of the effective charges [Eq. (3.18)],

$$\langle f_1 W^a f_2\rangle = \sum_b S_{f_1 f_1}^{-1/2} S_{f_2 f_2}^{-1/2} (\Pi^{-1/2})_{ab} V_{f_1 w^b f_2}\,, \tag{A.1}$$

does not depend, at the one-loop level, on which fermions f_1, f_2 we choose if we take the whole fermion multiplet to be massless.

Indeed, since all fermion Higgs couplings are zero in the limit of massless fermions, at one-loop order only graphs 4f and 4g contribute to $V_{f_1 w^a f_2}(p^2)$ defined in eq. (3.11) and only graph 4e contributes to $S_{f_1 f_2}(p^2)$ defined in eq. (3.10). Sorting out the group factors, these contributions read, when subtracting the contribution of the symmetric massless theory [see sect. 5 and eqs. (5.9) for notations]

$$S_{ff}(p^2) = 1 + \frac{1}{2}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\sum_b (T^b)^2_{ff} E(\lambda_b) \tag{A.2}$$

$$-iV_{f_1 w^a f_2}(p^2) = (T^a)_{f_1 f_2} + \frac{1}{2}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\sum_b (T^b T^a T^b)_{f_1 f_2} F(\lambda_b)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\sum_{b,c} i f_{abc}(T^b T^c)_{f_1 f_2} G(\lambda_b, \lambda_c)\,, \tag{A.3}$$

where T^a, $a = 1, \ldots, 24$, are the generators of the group G in the fermion representation, f_{abc} are the structure constants of the group $[T^a, T^b] = i f^{abc} T_c$ and as usual $\lambda_a = M_a^2/(-p^2)$. We made use of the fact that the functions E, F and G are independent of the massless fermions to sum over fermions inside the loop.

By standard manipulations we can put eq. (A.3) into the form

$$-iV_{f_1 w^a f_2}(p^2) = (T^a)_{f_1 f_2} - \frac{1}{2}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\sum_{b,c} f_{abc} f_{bcd} (T^d)_{f_1 f_2}\left[\tfrac{1}{2}G(\lambda_b, \lambda_c)\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{4}F(\lambda_b) + \tfrac{1}{4}F(\lambda_c)\right] + \frac{1}{4}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\sum_b F(\lambda_b)[T^a (T^b)^2 + (T^b)^2 T^a]_{f_1 f_2}\,. \tag{A.4}$$

But at zero momentum transfer, in the Landau gauge, we have the QED type relation mentioned in eq. (5.19),

$$E(\lambda) = F(\lambda)\,. \tag{A.5}$$

Furthermore, in the SU(5) model, we have $[(T^b)^2 T^a]_{f_1 f_2} = [T^a (T^b)^2]_{f_1 f_2} = (T^a)_{f_1 f_2}(T^b)^2_{f_i f_i}$ for any components a, f_i ($i = 1, 2$). It follows that, to one-loop order,

$$-iS_{f_1 f_1}^{-1/2} S_{f_2 f_2}^{-1/2} V(f_1 W^a f_2) = (T^a)_{f_1 f_2} - \frac{1}{4}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\sum_{b,c,d} f_{abc} f_{bcd} (T^d)_{f_1 f_2} V(\lambda_b, \lambda_c)\,, \tag{A.6}$$

where the function $V(\lambda_b, \lambda_c)$ is defined as

$$V(\lambda_b, \lambda_c) = G(\lambda_b, \lambda_c) + \tfrac{1}{2}E(\lambda_b) + \tfrac{1}{2}E(\lambda_c)\,. \tag{A.7}$$

Let us first consider the components a such that there is no mixing, i.e., satisfying $\Pi_{ad} = 0$ and $\sum_{b,c} f_{abc} f_{bcd} V(\lambda_b, \lambda_c) = 0$ for any $d \neq a$. This is the case when $a = \mathrm{W}$ and G for instance. Then the effective charge in eq. (A.1) can be written

$$\langle f_1 W^a f_2 \rangle = i R^{aa}(p^2)(T^a)_{f_1 f_2}\,, \tag{A.8}$$

where $R^{ad}(p^2)$ is fermion independent and defined, to one-loop order, as

$$R_{ad}(p^2) = (\Pi^{-1/2})_{ad}(p^2) - \frac{1}{4}\frac{g^2}{(4\pi)^2}\sum_{b,c} f_{abc} f_{bcd} V(\lambda_b, \lambda_c)\,. \tag{A.9}$$

This is the result stated in eqs. (3.23c) and (3.23d) for $a = \mathrm{W}$ and G, respectively.

Now we consider two components (a, d) which can mix together such as the (Z, A) system in the SU(5) model. We assume that (a, d) are orthogonal combinations at the tree level.

Then $(\Pi^{-1/2})_{ad}$ is of order g^2 and we get, to this order,

$$\begin{bmatrix} f_1 W^a f_2 \\ f_1 W^d f_2 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} R_{aa}(p^2) & R_{ad}(p^2) \\ R_{ad}(p^2) & R_{dd}(p^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (T^a)_{f_1 f_2} \\ (T^d)_{f_1 f_2} \end{bmatrix}, \tag{A.10}$$

with the notations of eq. (A.9).

For the (Z, A) system in SU(5), $W^a \equiv \mathrm{Z}$, $W^d \equiv \mathrm{A}$, and the normalized charges at the tree level are given by

$$(T^{\mathrm{Z}})_{ff} = \sqrt{\tfrac{8}{5}}(T_{3f} - \tfrac{3}{8}Q_f)\,, \qquad (T^{\mathrm{A}})_{ff} = \sqrt{\tfrac{3}{8}}Q_f\,, \tag{A.11}$$

where T_3 is the weak isospin charge and Q the electric charge. As explained in sect. 3, because the photon corresponds to the generators of an unbroken subgroup of SU(5), the electric charge is conserved to all orders and we must rotate Z and A in such a way that eq. (3.23a) holds:

$$\langle f A f \rangle = i R_{\mathrm{AA}}(p^2)\sqrt{\tfrac{3}{8}}Q_f\,. \tag{A.12}$$

Let

$$R_{(\theta - \theta_0)} = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ -\xi & 1 \end{pmatrix}$$

be this rotation to one-loop order ($\xi \sim \mathrm{O}(g^2)$). Then from eq. (3.19a) we get

$$\xi = R_{\mathrm{AZ}}(p^2) \tag{A.13}$$

and the effective charge for the neutral current becomes

$$\langle f Z f \rangle = \sqrt{\tfrac{8}{5}} R_{\mathrm{ZZ}}(p^2)\left[T_{3f} - \left(\frac{3}{8} - \frac{\sqrt{15}}{4} R_{\mathrm{AZ}}(p^2)\right) Q_f \right]. \tag{A.14}$$

We recover eq. (3.23b) with

$$\sin^2 \theta_{AZ}(p^2) = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{15}}{4} R_{AZ}(p^2) . \tag{A.15}$$

Let us come back to eq. (A.9). The graphs which contribute to $\Pi^{ad}(p^2)$ at one-loop order are figs. 4a–d. The contribution of ghost particles can be dropped in the Landau gauge because it is the same as in the symmetric case. The contribution of fig. 4d can be added to the vertex contribution and we get the combination of eq. (5.20),

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2) = D(\lambda_1, \lambda_2) - G(\lambda_1, \lambda_2) - \tfrac{1}{2}E(\lambda_1) - \tfrac{1}{2}E(\lambda_2) . \tag{A.16}$$

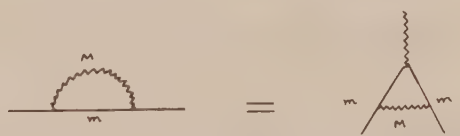
Appendix B

We present in this appendix, the explicit results of all the one-loop Feynman diagrams which have been used for the calculation of the different β-functions presented in sects. 5 and 6. We give all these results without the corresponding group factors and so they do not depend on the particular theoretical lagrangian model. They depend only on the spontaneously broken non-abelian gauge structure of the theory. Finally, we give some interesting details of the calculation concerning the way we did the integrations on the different Feynman x parameters.

We first want to notice the QED-type relation, which links the fermion-boson-fermion vertex to the fermion propagator, so reducing the number of independent function parameters. This relation is based on the one-loop observation that the derivative with respect to p^μ of the fermion propagator, gives the γ^μ vertex with zero transfer momentum:

(B.1)

Following the notations of sects. 4, 5 and using these diagrammatic identities, one can easily extract the following relation between the contributions to the various effective charges:



(B.2)

In regularized form, all the graph functions can be expressed in terms of only one generating integral $\int_0^1 dx\, I^{m-\varepsilon}(\lambda_1, \lambda_2)$, where m is an integer number and $I(\lambda_1, \lambda_2) = x(1-x) + x\lambda_1 + (1-x)\lambda_2$. After the ε-expansion we did all the integrations on the Feynman parameters explicitly and we found relatively simple expressions for all

the threshold functions in terms of polynomials, "log" and "square root" of the different λ_i. In order to do that, one can use the following recursion procedure.

We first need to express all the results only in terms of the generating integral defined above. For this we use the following recursion relations (for simplicity in the following we drop the integration symbol $\int_0^1 dx$):

$$(1-2x)I^a = \frac{1}{1+a}(\lambda_1^{1+a} - \lambda_2^{1+a}), \tag{B.3}$$

$$x^2 I^a = \frac{2+a}{1+a} I^a - \frac{1}{1+a}\lambda_1^{1+a} - \lambda_2 I^a, \tag{B.4}$$

$$2\frac{3+2a}{1+a} I^{1+a} = [1+2(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)^2]I^a + \frac{1}{1+a}[\lambda_1^{1+a} + \lambda_2^{1+a} - (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1^{1+a} - \lambda_2^{1+a})], \tag{B.5}$$

where a is any real number and in particular we can take $a = n - \varepsilon$ with n any integer number.

We then need to do the integrations on the Feynman x parameters. For that we give two basic integrations:

$$\ln I = \tfrac{1}{2}\ln\lambda_1\lambda_2 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)\ln\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 2 + a\ln\frac{1+\lambda_1+\lambda_2+2a}{1+\lambda_1+\lambda_2-2a}, \tag{B.6}$$

$$I^{-1} = \frac{1}{2a}\ln\frac{1+\lambda_1+\lambda_2+2a}{1+\lambda_1+\lambda_2-2a}, \tag{B.7}$$

where

$$2a = [1+2(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)^2]^{1/2}.$$

For all the other combinations $I^n \ln^m I$ one must use the recursion relations (B.3)–(B.5). For example one can find the following integration recursion relations:

$$I^n = \frac{n}{2(2n+1)}[1+2(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)^2]I^{n-1} + \frac{1}{2(2n+1)}[\lambda_1^n + \lambda_2^n - (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1^n - \lambda_2^n)], \tag{B.8}$$

$$I^n \ln I = \frac{n}{2(2n+1)}[1+2(\lambda_1+\lambda_2)+(\lambda_1-\lambda_2)^2]I^{n-1}\ln I + \frac{1}{n(2n+1)}I^n + \frac{1}{2(2n+1)}[\lambda_1^n \ln\lambda_1 + \lambda_2^n \ln\lambda_2 - (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1^n \ln\lambda - \lambda_2^n \ln\lambda_2)] - \frac{1}{2n(2n+1)}[\lambda_1^n + \lambda_2^n - (\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1^n - \lambda_2^n)], \tag{B.9}$$

where n is any integer number, and so on.

We finish this appendix with the presentation of the explicit results. We will give the results only for the graphs which have been used for the different β-function calculations in the Landau gauge. For this we put the fermion masses in the fermion propagator and in the vertex function equal to zero. In this approximation all the Yukawa couplings are zero.

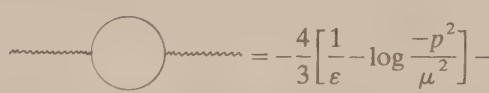
So, in the following we give [in units of $g^2/(4\pi)^2$ and without the group factors]:

(i) The results graph by graph which contribute to the wave-function renormalization of the vector boson propagator ($C(\lambda_1, \lambda_2)$, $B(\lambda_1, \lambda_2)$, $A(\lambda_1, \lambda_2)$, $D(\lambda_1, \lambda_2)$).

(ii) The results for the fermion self-energy $E(\lambda)$.

(iii) The results for the fermion–boson–fermion vertex $G(\lambda_1, \lambda_2)$, $F(\lambda)$ being equal to $E(\lambda)$ following (B.2a).

(iv) The results for the combination $\Phi(\lambda_1, \lambda_2)$ defined in eq. (5.20).



$$= -\frac{4}{3}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \log\frac{-p^2}{\mu^2}\right] - \tfrac{8}{9} + C(\lambda_1, \lambda_2)\,, \tag{B.10a}$$

$$\begin{aligned} C(\lambda_1, \lambda_2) = {} & \tfrac{1}{12}\{-16 s_1\lambda - 64(s_2-2)\lambda^2 - [48 s_1\lambda^2 + 64(s_2-2)\lambda^3] \\ & \times (a-b)\log a + 16\log\lambda + 16[1 - s_1\lambda + 4(s_2-2)\lambda^2 \\ & + 12\lambda^2/(1 + 2s_1\lambda + (s_2-2)\lambda^2)]\mathscr{D}(\lambda_1, \lambda_2)\}\,, \end{aligned} \tag{B.10b}$$

$$C(\lambda_1, 0) = -\tfrac{4}{3}\lambda - \tfrac{16}{3}\lambda^2 + \tfrac{4}{3}\log\lambda + \tfrac{4}{3}(1 + 3\lambda^2 + 4\lambda^3)\log\frac{1+\lambda}{\lambda}\,, \tag{B.10c}$$

$$C(\lambda, \lambda) = -\tfrac{8}{3}\lambda + \tfrac{4}{3}\log\lambda + \frac{4}{3}\frac{1 + 2\lambda + 4\lambda^2}{1 + 4\lambda}\mathscr{D}(\lambda, \lambda) \equiv C(\lambda)\,, \tag{B.10d}$$

where $\mu^2 \equiv \mu_0^2 4\pi\, e^{\gamma}$, with γ the Euler constant, $\lambda_i = M_i^2/(-p^2)$, $\lambda = (\lambda_1\lambda_2)^{1/2} = M_1M_2/(-p^2)$, $a = M_1/M_2$, $b = 1/a$, $s_n = a^n + b^n$ and the threshold function $\mathscr{D}$ is given by

$$\mathscr{D}(\lambda_1, \lambda_2) = r\log\frac{1 + \lambda_1 + \lambda_2 + 2r}{1 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2r}\,, \tag{B.11}$$

with

$$2r = [1 + 2(\lambda_1 + \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)^2]^{1/2}\,.$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \log\frac{-p^2}{\mu^2}\right] - \tfrac{5}{18} + B(\lambda_1, \lambda_2)\,, \tag{B.12a}$$

$$B(\lambda, 0) = \tfrac{1}{3}\lambda + \tfrac{4}{3}\lambda^2 + \tfrac{1}{6}\log\lambda + (\tfrac{1}{6} - \lambda^2 - \tfrac{4}{3}\lambda^3)\log\frac{1+\lambda}{\lambda}\,, \tag{B.12b}$$

$$B(\lambda, \lambda) = \tfrac{2}{3}\lambda + \tfrac{1}{6}\log\lambda + (\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{3}\lambda)\mathscr{D}(\lambda, \lambda)\,. \tag{B.12c}$$

$$= A(\lambda_1, \lambda_2)\,, \tag{B.13a}$$

$$A(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{12}\Big\{-4a\lambda+(8a^2-16)\lambda^2+[4+12(1-b^2)\lambda^2+8(a-b)^3\lambda^3]\log a$$
$$-(4-4b\lambda-8b^2\lambda^2)(1+b\lambda)\log\frac{1+b\lambda}{b\lambda}+\Big[4-4s_1\lambda$$
$$-8(s_2-2)\lambda^2+12a\lambda-12\,\frac{a\lambda+(1+a^2)\lambda^2}{1+2s_1\lambda+(s_2-2)\lambda^2}\Big]$$
$$\times\mathscr{D}(\lambda_1,\lambda_2)\Big\}, \tag{B.13b}$$

$$A(\lambda,0)=-\tfrac{1}{3}\lambda+\tfrac{2}{3}\lambda^2+\tfrac{1}{3}\log\lambda+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{2}{3}\lambda)\log\frac{1+\lambda}{\lambda}, \tag{B.13c}$$

$$A(0,\lambda)=0. \tag{B.13d}$$

$$=\frac{7}{3}\Big[\frac{1}{\varepsilon}-\log\frac{-p^2}{\mu^2}\Big]+\tfrac{23}{36}+D(\lambda_1,\lambda_2), \tag{B.14a}$$

$$D(\lambda_1,\lambda_2)=\tfrac{17}{12}+\tfrac{13}{12}s_1\lambda+(\tfrac{8}{3}s_2-6)\lambda^2-\Big(\frac{7}{3}+\frac{1}{8\lambda^2}\Big)\log\lambda$$
$$+\Big[\frac{(1+a\lambda)^2}{\lambda^2}(-\tfrac{1}{8}+\tfrac{5}{6}a\lambda-\tfrac{7}{12}a^2\lambda^2+\tfrac{1}{3}a^3\lambda^3)\log\frac{1+a\lambda}{a\lambda}+a\Leftrightarrow b\Big]$$
$$+2\Big[(\tfrac{1}{6}s_4+\tfrac{4}{3}s_2-3)\lambda^3+(\tfrac{1}{24}s_3+\tfrac{35}{24}s_1)\lambda^2+\tfrac{23}{48}s_1+\frac{7}{24}\,\frac{1}{\lambda}\Big]$$
$$\times(a-b)\log a+\frac{1}{12}\Big[\frac{3}{2\lambda^2}-\frac{17}{2\lambda}s_1-(3s_2+26)+(3s_3+9s_1)\lambda$$
$$-(4s_4+32s_2-72)\lambda^2+\frac{18(1+s_1\lambda-8\lambda_2)}{1+2s_1\lambda+(s_2-2)\lambda^2}\Big]\mathscr{D}(\lambda_1,\lambda_2), \tag{B.14b}$$

$$D(\lambda,0)=\tfrac{7}{12}+\tfrac{5}{3}\lambda+\tfrac{7}{3}\lambda^2-\Big(\frac{7}{3}+\frac{7}{12}\,\frac{1}{\lambda}\Big)\log\lambda-\Big(\frac{7}{12}\,\frac{1}{\lambda}+\tfrac{7}{3}$$
$$+\tfrac{17}{6}\lambda^2+\tfrac{7}{3}\lambda^3\Big)\log\frac{1+\lambda}{\lambda}, \tag{B.14c}$$

$$D(\lambda,\lambda)=\tfrac{17}{12}+\tfrac{13}{6}\lambda-\tfrac{2}{3}\lambda^2-\Big(\frac{7}{3}+\frac{1}{8\lambda^2}\Big)\log\lambda+(1+\lambda)^2\Big(\tfrac{1}{6}\lambda^2-\tfrac{5}{4}\lambda$$
$$+\frac{1}{2}+\frac{17}{12}\,\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{4\lambda^2}\Big)\log\frac{1+\lambda}{\lambda}+\frac{1}{12}\Big(\frac{3}{2\lambda^2}-\frac{17}{\lambda}-14-12\lambda\Big)\mathscr{D}(\lambda,\lambda). \tag{B.14d}$$

$$=-\frac{1}{6}\Big[\frac{1}{\varepsilon}-\log\frac{-p^2}{\mu^2}\Big]-\frac{1}{9}. \tag{B.15}$$

$$= E(\lambda)\,, \tag{B.16a}$$

$$E(\lambda) = -\tfrac{1}{2} + \lambda + \frac{1}{2\lambda}\log\lambda + \left(\frac{1}{2\lambda} - \tfrac{3}{2}\lambda - \lambda^2\right)\log\frac{1+\lambda}{\lambda}\,. \tag{B.16b}$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon} - \log\frac{-p^2}{\mu^2}\right] - \tfrac{3}{2} + G(\lambda_1, \lambda_2)\,, \tag{B.17a}$$

$$\begin{aligned} G(\lambda_1, \lambda_2) = {} & -\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{3}s_1\lambda + \left[-\frac{1}{6\lambda^2} + \frac{3}{2}\right]\log\lambda + \left[\frac{s_1}{6\lambda^2} + \frac{5}{3\lambda}\right. \\ & \left. + \tfrac{3}{2}s_1\right]\frac{1}{a-b}\log a + \left[\frac{1}{6(a-b)}\left(\frac{1}{a\lambda^2} + \frac{2}{\lambda}\right)(1+a\lambda)^3\log\frac{1+a\lambda}{a\lambda}\right. \\ & \left. + a \Leftrightarrow b\right], \end{aligned} \tag{B.17b}$$

$$\begin{aligned} G(\lambda, 0) = {} & -\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{3}\lambda - \frac{1}{6\lambda} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{5}{\lambda} + 9\right)\log\lambda \\ & + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda}\right)(1+\lambda)^3\log\frac{1+\lambda}{\lambda}\,, \end{aligned} \tag{B.17c}$$

$$G(\lambda, \lambda) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{6\lambda} + \lambda + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{6\lambda^2}\right)\log\lambda + \left(-\frac{1}{6\lambda^2} + \tfrac{3}{2} + \tfrac{7}{3}\lambda + \lambda^2\right)\log\frac{1+\lambda}{\lambda}\,. \tag{B.17d}$$

Finally the combination Φ is

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1, \lambda_2) = {} & \frac{1}{12}\left\{32 + 11s_1\lambda + (32s_2 - 72)\lambda^2 - \left(46 + \frac{3s_1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2}\right)\log\lambda\right. \\ & + \left[\frac{10}{\lambda} + \tfrac{23}{2}s_1 + (s_3 + 35s_1)\lambda^2 + (4s_4 + 32s_2 - 72)\lambda^3 - \frac{1}{s_2 - 2}\right. \\ & \left.\times\left(\frac{2}{\lambda^2}s_1 + \frac{20}{\lambda} + 18s_1\right)\right](a-b)\log a + \left(-\left[(1+a\lambda)\left(\frac{3}{2\lambda^2} - \frac{17}{2\lambda}a\right.\right.\right. \\ & \left.\left.\left. - 3a^2 + 3a^3\lambda - 4a^4\lambda^2\right) + \frac{3}{a\lambda} - 9a\lambda - 6a^2\lambda^2\right]\log\frac{1+a\lambda}{a\lambda} \\ & + \frac{1}{a-b}\left(\frac{2}{a\lambda^2} + \frac{4}{\lambda}\right)(1+a\lambda)^3\log\frac{1+a\lambda}{a\lambda} + a \Leftrightarrow b\Big) + \left[\frac{3}{2\lambda^2}\right. \\ & - \frac{17}{2\lambda}s_1 - (3s_2 + 26) + (3s_3 + 9s_1)\lambda - (4s_4 + 32s_2 - 72)\lambda^2 \\ & \left.\left. + \frac{18(1 + s_1\lambda - 8\lambda^2)}{1 + 2s_1\lambda + (s_2 - 2)\lambda^2}\right]\mathcal{D}(\lambda_1, \lambda_2)\right\}, \end{aligned} \tag{B.18a}$$

$$\Phi(\lambda,0)=\tfrac{19}{12}+\tfrac{3}{2}\lambda+\tfrac{7}{3}\lambda^2+\frac{1}{6\lambda}-\left(\frac{23}{6}+\frac{5}{3\lambda}+\frac{1}{6\lambda^2}\right)\log\lambda$$
$$-\left(\tfrac{7}{3}\lambda^3+\tfrac{8}{3}\lambda^2+\tfrac{5}{12}\lambda+\frac{23}{6}+\frac{5}{3\lambda}+\frac{1}{6\lambda^2}\right)\log\frac{1+\lambda}{\lambda}, \qquad \text{(B.18b)}$$

$$\Phi(\lambda,\lambda)=2+\tfrac{13}{6}\lambda-\tfrac{2}{3}\lambda^2-\frac{1}{6\lambda}+\left(-\frac{23}{6}-\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{24\lambda^2}\right)\log\lambda$$
$$+\left(\tfrac{2}{3}\lambda^3+\tfrac{1}{6}\lambda^2-\tfrac{5}{6}\lambda+\frac{5}{12}+\frac{2}{3\lambda}-\frac{1}{12\lambda^2}\right)\log\frac{1+\lambda}{\lambda}$$
$$-\left(\lambda+\frac{7}{6}+\frac{17}{12\lambda}-\frac{1}{8\lambda^2}\right)\mathscr{D}(\lambda,\lambda)\,. \qquad \text{(B.18c)}$$

References

[1] J.C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D8 (1973) 1240
[2] H. Georgi and S.L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 438
[3] H. Georgi, H. Quinn and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 451
[4] A.J. Buras, J. Ellis, M.K. Gaillard and D.V. Nanopoulos, Nucl. Phys. B135 (1978) 66
[5] D.A. Ross, Nucl. Phys. B140 (1978) 1
[6] T.J. Goldman and D.A. Ross, Nucl. Phys. B171 (1980) 273; Phys. Lett 84B (1979) 208
[7] W.J. Marciano, Phys. Rev. D20 (1979) 274
[8] S. Weinberg, Phys. Lett. 91B (1980) 51
[9] L. Hall, Nucl. Phys. B178 (1980) 75
[10] J. Ellis, M.K. Gaillard, D.V. Nanopoulos and S. Rudaz, Nucl. Phys. B176 (1980) 61
[11] P. Binetruy and T. Schücker, Nucl. Phys. B178 (1981) 293, 307
[12] N.P. Chang, A. Das and J. Perez-Mercader, Phys. Rev. D22 (1980) 1414
[13] C.H. Llewellyn Smith, G.G. Ross and J.F. Wheater, Nucl. Phys. B177 (1981) 263
[14] I. Antoniadis, C. Kounnas and C. Roiesnel, LPTENS preprint 81/4 (1981)
[15] K. Symmanzik, Comm. Math. Phys. 34 (1973) 7
[16] T. Appelquist and J. Carrazone, Phys. Rev. D11 (1975) 2856
[17] B. Ovrut and H. Schnitzer, Phys. Rev. D21 (1980) 3369
[18] I. Antoniadis, C. Bouchiat and J. Iliopoulos, Phys. Lett. 97B (1980) 367
[19] J. Kubo and S. Sakakibara, Dortmund preprints DO-TH 80/05, DO-TH 80/25 (1980)
[20] Y. Kazama and Y.P. Yao, Fermilab Pub. 81/18 THY (1981)
[21] F. Antonelli and L. Maiani, Nucl. Phys. B186 (1981) 269
[22] W.J. Marciano and A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 163
[23] A. Sirlin and W.J. Marciano, Nucl. Phys. B189 (1981) 442
[24] S. Dawson, J.S. Hagelin and L. Hall, Harvard preprint HUTP-80/A090
[25] C.G. Llewellyn Smith and J.F. Wheater, Phys. Lett. 105B (1981) 486
[26] G. Senjanović and A. Sokorac, Nucl. Phys. B164 (1980) 305
[27] J. Drees, 1981 Int. Symp. on Lepton and photon interactions at high energies, Bonn, 1981; A.J. Buras, *ibid.*
[28] C.Y. Prescott, Int. Conf. on High-energy physics, Geneva, 1979; F. Dyak, *ibid.*
[29] P. Langacker, Int. Symp. on Lepton and photon interactions at high energies, Bonn, 1981; D. Yu Bardin, P.Ch. Christova and O.M. Fedorenko, Nucl. Phys. B175 (1980) 435; E.A. Paschos and M. Wirbel, Nucl. Phys. B194 (1982) 189

CHAPITRE IV

LE PROBLEME DES FERMIONS

IV. 1) Unification de la saveur

Combien de familles de fermions ?

Le modèle standard des interactions fortes, électromagnétiques et faibles contient un grand nombre de paramètres indéterminés représentant les masses des quarks et des leptons ainsi que les angles de mélange du type Cabibbo. Néanmoins le spectre des quarks et des leptons montre plusieurs régularités. Une même structure inexpliquée se répète vraisemblablement au moins trois fois. Cette structure, appelée famille ou génération, est caractérisée par une combinaison bien précise de nombres quantiques par rapport au groupe $SU(2) \times U(1) \times SU(3)$. En particulier, comme on l'a rappelé dans l'Introduction, tous les fermions observés jusqu'ici sont soit des singulets, soit des doublets de SU(2) ou des triplets de SU(3). De plus il y a une hiérarchie très apparente dans le spectre de masse des fermions :

$$\begin{aligned} m_e &= 0.5 \text{ MeV} ; & m_d &= 11 \pm 4 \text{ MeV} ; & m_u &= 6 \pm 2 \text{ MeV} \\ m_\mu &= 106 \text{ MeV} ; & m_s &= 220 \pm 80 \text{ MeV} ; & m_c &= 1.3 \pm 0.1 \text{ GeV} \\ m_\tau &= 1.78 \text{ MeV} ; & m_b &= 4.5 \pm 0.2 \text{ GeV} ; & m_t &> 19 \text{ GeV} \end{aligned} \qquad (IV.1.1)$$

Tous les résultats expérimentaux sont compatibles avec des neutrinos de masse nulle, quoiqu'en fait les bornes obtenues dans le laboratoire ne soient pas très strictes :

$$m_{\nu_e} < 30 \text{ eV} \; ; \; m_{\nu_\mu} < 0.5 \text{ keV} \; ; \; m_{\nu_\tau} < 200 \text{ MeV} \qquad (IV.1.2)$$

La valeur absolue des masses des quarks légers n'est pas connue très précisément.[8] Dans Q.C.D. leur définition dépend du point de renormalisation μ. Par contre les rapports de masse $m_u/m_d = 1.8$ et $m_d/m_s = 20$ sont fixés par les formules (II.1.11). L'ambiguité est moins grande pour les quarks lourds. Enfin il est possible d'obtenir des bornes plus fortes sur

les masses de neutrinos à partir d'une contrainte cosmologique fixée par la borne supérieure sur la densité de matière dans l'univers qui est déduite dans le modèle standard du "big band" d'après la valeur moderne de la constante de Hubble H et les bornes inférieures sur le temps de vie de l'univers. Cette contrainte se traduit par la condition :

$$\sum_i m_{\nu_i} < 40 \text{ eV} \qquad \text{(IV.1.3)}$$

La sommation doit être prise sur tous les types de neutrinos stables de masse inférieure à 3 MeV[34] (T = 3 MeV est la température de découplage de neutrinos relativistes). Malgré ces restrictions la contrainte (IV.1.3) est intéressante.

Ce chapitre est consacré à la question de savoir s'il est possible d'expliquer les fait expérimentaux brièvement rappelés ci-dessus dans le cadre de la grande unification. Il peut être utile de se poser d'abord les questions suivantes :

1) Existe-t-il un critère expliquant pourquoi seuls certains multiplets de fermions ont été observés ?

2) Existe-t-il une contrainte sur le nombre de familles ?

L'hypothèse de grande unification fournit un élément de réponse à la première question car elle est intimement liée à la propriété de liberté asymptotique des interactions de couleur. En effet la consistence de l'approche exposée au troisième chapitre exige que les constantes de couplage restent dans le domaine perturbatif au moins jusqu'à la masse de grande unification M_X. Cela se traduit en particulier par des contraintes sur les représentations admissibles de particules colorées de masse inférieure à M_X. On peut les obtenir en première approximation en appliquant le théorème de découplage et en utilisant la formule (I.3.1). Les constantes b_i qui apparaissent dans cette formule sont données, si on néglige la contribution des scalaires, par la formule :

$$b_i = \frac{11}{2} T(W_i) - T(F_i) \qquad \text{(IV.1.4)}$$

T(R) représente la normalisation des générateurs du groupe considéré dans la représentation R : $\mathrm{Tr}\, T^a T^b = T(R)\,\delta^{ab}$. Pour le groupe SU(3) on obtient : $T(\underline{1}) = 0$, $T(\underline{3}) = 1/2$, $T(\underline{6}) = 5/2$, $T(\underline{8}) = 3$, $T(\underline{10}) = 15/2$, $T(\underline{15}) = 35/2$ etc... La condition $b_3 > 0$ jusqu'à la masse de grande unification implique $T(F) \leq 33/2$. Ainsi seuls sont admissibles des singulets, des triplets, des sextets ou des octets de couleur (on doit sommer sur les parties droite et gauche des fermions). Il n'y a pas d'argument théorique convaincant permettant de restreindre les représentations de couleur d'éventuels fermions superlourds. Pourtant si on applique le principe de simplicité et d'économie, et c'est ce que nous ferons, il est naturel de conserver la même contrainte au-delà de la masse de grande unification. En général cela revient à imposer la condition de liberté asymptotique sur le groupe de grande unification lui-même. Il est facile de se rendre compte qu'il est difficile de construire des modèles unifiés réalistes contenant des sextets. Par contre, la présence d'octets de couleur est tout à fait possible. Elle est même nécessaire dans une classe de théories très en vogue actuellement : les théories supersymétriques[35]. Quoique très intéressante, nous n'étudierons pas cette possibilité dans ce chapitre. Nous nous contenterons de rechercher les groupes G de grande unification satisfaisant à la condition de restriction de couleur : les représentations admissibles de G pour les fermions doivent contenir au plus des singulets, des triplets et des antitriplets de couleur.

Une réponse à la deuxième question est fournie par ce qui précède. La liberté asymptotique du groupe SU(3) de couleur implique l'existence au maximum de 8 générations de masse inférieure à celle de la grande unification. La cosmologie moderne permet en outre d'apporter une contrainte suppémentaire sur le spectre des fermions que toute théorie conséquente se doit d'incorporer. En effet il est maintenant possible d'obtenir des bornes très strictes sur le nombre d'espèces de neutrinos de masse nulle (plus exactement vérifiant la contrainte (IV.1.3)). Cette restriction est basée sur l'étude de la formation des éléments primordiaux tels que l'hélium H_{e_4} au début de l'univers. On déduit de l'abondance observée d'hélium dans l'univers qu'il peut exister trois, au maximum quatre types, de neutrinos de masse nulle[36]. Ce résultat n'interdit pas l'existence de doublets

avec un lepton neutre massif ($m_{L^o} > 3\,MeV$) ni évidemment celle de singulets vis à vis des interactions faibles. Il est tout de même étonnant que l'hypothèse de grande unification suggère l'existence d'un désert relatif entre la masse M_W de Weinberg et Salam et la masse M_X de grande unification. La plupart des particules ne se transformant pas comme des singulets de $SU(2) \times U(1) \times SU(3)$ auraient déjà été observées.

Le modèle minimal basé sur SU(5) vérifie toutes les contraintes énumérées ci-dessus. Cependant il ne permet pas d'expliquer la répétition des trois familles de fermions. En général on tente d'expliquer des régularités en physique en introduisant une symétrie. Il n'est pas exclu qu'une symétrie discrète puisse décrire le spectre des fermions dans le cadre de la grande unification. Cependant nous envisageons dans ce chapitre la possibilité que la symétrie en question soit continue. Comme nous l'avons dit dans l'Introduction, il est préférable que cette symétrie, qui doit être spontanément brisée, soit réalisée localement. Il est alors naturel de chercher à unifier ces nouvelles interactions de saveur avec les interactions électromagnétiques, faibles et fortes, tout en satisfaisant les contraintes présentées dans ce paragraphe.

Méthodes de construction de modèles grand-unifiés

Il s'agir de construire une théorie grand-unifiée basée sur un groupe simple G qui contienne $SU(2) \times U(1) \times SU(3)$ comme sous-groupe et qui admette une ou plusieurs représentations irréductibles qui satisfassent la condition de restriction de couleur présentée au paragraphe précédent. Une méthode très pratique pour la construction de modèles consiste à étudier la décomposition de la représentation fondamentale $\underline{f}$ de G par rapport au sous-groupe $G^s \times SU(3)^c$ où G^s est le sous-groupe de G engendré par les générateurs singulets de couleur :

$$\underline{f} = \sum_n (\underline{r}_n , \underline{d}_n^c) \qquad (IV.1.5)$$

où $\underline{r}_n$ et $\underline{d}_n^c$ sont des représentations irréductibles de G^s et $SU(3)^c$ respectivement. En effet si un groupe G admet au moins une représentation

irréductible dont la décomposition par rapport à $SU(3)^c$ ne contient que $\underline{1}^c$, $\underline{3}^c$ et $\bar{\underline{3}}^c$, alors on peut démontrer[37] qu'il en est nécessairement de même pour la représentation fondamentale. Dès que le contenu en couleur de la représentation fondamentale est connu, le contenu en couleur de tout autre représentation irréductible s'obtient facilement à partir des produits tensoriels. Considérons l'exemple des groupes unitaires SU(n). La décomposition de la représentation fondamentale $\underline{n}$ de SU(n) est évidemment de la forme :

$$\underline{n} = (\underline{n}_1, \underline{1}^c) + (\underline{n}_3, \underline{3}^c) + (\underline{n}_{\bar{3}}, \bar{\underline{3}}^c) \qquad \text{(IV.1.6)}$$

où $\underline{n}_i$ sont des représentations du groupe de saveur G^s et $n = n_1 + 3n_3 + 3n_{\bar{3}}$. En général G^s nest pas un groupe semi-simple car il contient un ou plusieurs facteurs U(1). Pour déterminer G^s il faut étudier la représentation adjointe de SU(n), $\underline{Adj}$, qui s'obtient à partir de $\underline{n}$ en faisant le produit tensoriel

$$\underline{n} \times \bar{\underline{n}} = \underline{1} + \underline{Adj} \qquad \text{(IV.1.7)}$$

Le cas physiquement le plus intéressant est celui dans lequel $n_{\bar{3}} = 0$ et $n_3 = 1$. Les autres valeurs de n_3 et $n_{\bar{3}}$ font intervenir des groupes très grands. Si $n_1 = n - 3$ la représentation adjointe admet la décomposition

$$\underline{Adj} = [(\underline{n-3}, \underline{1}^c) + (\underline{1}, \underline{3}^c)] \times [(\overline{\underline{n-3}}, \underline{1}^c) + (\underline{1}, \bar{\underline{3}}^c)] - (\underline{1}, \underline{1}^c) \qquad \text{(IV.1.8)}$$

$$= (\underline{n-3} \times \overline{\underline{n-3}}, 1^c) + (\underline{n-3}, \bar{\underline{3}}^c) + (\overline{\underline{n-3}}, \underline{3}^c) + (\underline{1}, \underline{8}^c) \qquad \text{(IV.1.9)}$$

Le produit $(\underline{n-3}) \times (\overline{\underline{n-3}})$ contient uniquement des générateurs de saveur et $\underline{n-3}$ doit être la représentation fondamentale de SU(n-3) sinon G^s ne serait pas aussi grand que possible. Le singulet dans le produit $\underline{n-3} \times \overline{\underline{n-3}}$ correspond à un facteur U(1) si bien que finalement

$$SU(n) \supset SU(n-3) \times U(1) \times SU(3)^C$$

$$\underline{n} = (\underline{n-3}, \underline{1}^C) + (\underline{1}, \underline{3}^C)$$

$$\text{Adj}(SU(n)) = (\text{Adj}(SU(n-3)), \underline{1}^C) + (\underline{1}, \underline{1}^C) + (\underline{1}, \underline{8}^C) \qquad \text{(IV.1.10)}$$

$$+ (\underline{n-3}, \bar{3}^C) + (\overline{\underline{n-3}}, \underline{3}^C)$$

On peut engendrer toutes les représentations irréductibles possibles à partir des produits tensoriels de la fondamentale $\underline{n}$ avec elle-même. Il est alors facile de se rendre compte que les seules représentations irréductibles de SU(n) qui satisfassent la condition de restriction de couleur, sont les représentations complètement antisymétriques $(\underline{n}^k)_A = (\underline{n} \times n \times \ldots \times \underline{n})_A$ de dimension $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$:

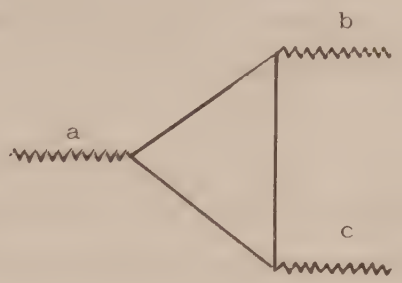
$$(\underline{n}^k)_A = [(\underline{n_1}^k)_A, \underline{1}^C] + [(\underline{n_1}^{k-1})_A, \underline{3}^C] + [(\underline{n_1}^{k-2})_A, \bar{3}^C] + [(\underline{n_1}^{k-3})_A, \underline{1}^C]$$

(IV.1.11)

N'importe quelle autre représentation doit contenir des termes en $(n^j)_S$ avec des représentations de couleur plus grandes. Par exemple $(\underline{n} \times \underline{n})_S$ est une représentation irréductible de dimension $n(n+1)/2$ contenant $[(\underline{1},\underline{3}^C) \times (\underline{1},\underline{3}^C)]_S = (1,\underline{6}^C)$. Les formules (IV.1.10) et (IV.1.11) résument l'essentiel de ce qu'il faut connaitre pour la construction de modèles de grande unification basés sur les groupes unitaires SU(n). Le lecteur pourra trouver une discussion plus formelle et plus complète, couvrant tous les cas possibles, dans la référence (37) ainsi qu'un exposé de techniques de théorie des groupes utiles pour la construction de modèles unifiés dans la revue de Slansky[38].

Il existe une contrainte qu'il est nécessaire d'imposer et qui est très utile pour restreindre le nombre de combinaisons de représentations antisymétriques admissibles. En effet ces combinaisons ne doivent pas contenir d'anomalies de triangles afin que la théorie grand-unifiée soit renormalisable. Dans cette classe de théories le couplage des bosons de jauge aux fermions contient en général une partie vectorielle et une partie

axiale. Pour prouver la renormalisabilité des théories de jauge, il est nécessaire que ces courants soient conservés en l'absence de brisure spontanée de symétrie. Cependant la divergence des courants axiaux reçoit une contribution anormale due aux graphes en triangle[10] :



Une contribution non nulle à la divergence d'un courant axial se manifesterait par un comportement non physique de certaines amplitudes à très haute énergie (violation de l'unitarité). Il faut donc que la somme des contributions aux anomalies de triangles s'annule[38]. Cette condition s'écrit pour un groupe G quelconque :

$$\mathrm{Tr}(\{T_L^a, T_L^b\}\ T_L^c) = \mathrm{Tr}(\{T_R^a, T_R^b\}\ \ T_R^c) \qquad \text{(IV.1.12)}$$

où T_L^a et T_R^a sont les générateurs de G dans les représentations de fermions gauches et droits respectivement. Dans une théorie de type vectoriel cette condition est automatiquement vérifiée. Dans une théorie qui viole la parité il faut que l'anomalie s'annule séparément pour les fermions gauches et droits. Il se trouve que seules les représentations des groupes unitaires peuvent produire des anomalies. Les représentations des autres groupes sont réelles, c'est à dire qu'elles sont équivalentes à leurs leurs conjuguées complexes. L'anomalie A(n,k) associée à une représentation antisymétrique $(n^k)_A$ de SU(n) s'écrit[40] :

$$A(n,k) = \frac{(n-3)!\ (n-2k)}{(n-k-1)!\ (k-1)!} \qquad \text{(IV.1.13)}$$

Dans le cas particulier où la reproduction $(n^k)_A$ ne contient que des singulets ou des doublets de SU(2), c'est à dire si la décomposition de la représentation fondamentale $\underline{n}_1$ de G^s par rapport à SU(2) s'écrit

$$\underline{n}_1 = \underline{n-3} = \underline{n-5}, \underline{1}) + (\underline{1}, \underline{2}) \qquad \text{(IV.1.14)}$$

alors la formule (IV.1.13) se réécrit simplement

$$A(n,k) = N_T - \frac{1}{2} N_D \qquad \text{(IV.1.15)}$$

où N_T et N_D sont respectivement le nombre de triplets de SU(3) et de doublets de SU(2) dans la représentation $(n^k)_A$

L'article reproduit dans la section suivante montre que le modèle minimal qui satisfasse toutes les contraintes énoncées plus haut est une théorie grand-unifiée basée sur le groupe SU(8), dans laquelle les fermions gauches sont placés dans la représentation réductible

$$\underline{f}_L = (\underline{8}^3)_A + (\underline{8}^6)_A + (\underline{8}^7)_A \qquad \text{(IV.1.16)}$$

On y trouvera la liste des particules prédites par ce modèle qui suggère l'existence d'un symétrie de jauge horizontale SU(3), brisée spontanément, entre les différentes générations. Il est bien sûr possible d'envisager des modèles plus compliqués avec un nombre plus grand de paramètres arbitraires. Mais en général le nombre de saveurs de quarks augmente très rapidement avec le rang du groupe. Pour préserver la liberté asymptotique de groupe SU(3) de couleur, il faut que la majeure partie de ces quarks soient super-lourds. Il peut alors sembler très artificiel d'introduire une structure très compliquée vers 10^{15} GeV pour expliquer une structure relativement simple vers 10^2 GeV. Déjà le principe d'économie n'est pas vraiment respecté dans le modèle SU(8). Il semble en effet difficile d'obtenir des relations de masse réalistes entre les fermions de manière naturelle. Nous ne savons pas si cette limitation trouve son origine dans la difficulté à utiliser le mécanisme de Higgs pour des groupes très grands ou bien, plus fondamentalement, dans l'inadéquation des symétries continues à expliquer les régularités observées dans le spectre des fermions.

Physics Letters 93B, " (6 June 1980) 343-346.

SU(8) GRAND UNIFICATION

C.W. Kim and C. Roiesnel

SU(8) GRAND UNIFICATION ☆

C.W. KIM [1] and C. ROIESNEL
Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France

Received 15 April 1980

A grand unified gauge theory based on the group SU(8) is presented. The set of rules motivating the choice of SU(8) is given. The particle content of the theory suggests a natural embedding of a horizontal SU(3) symmetry in the SU(8) grand unified symmetry.

The notion of a gauge group unifying strong, weak and electromagnetic interactions is a very attractive one [1–3]. The simplest possible grand unification of Q.C.D. with the Weinberg–Salam model is based on the group SU(5) [2]. However Georgi and Glashow's model leaves unanswered the important question of flavor unification. As is well known, fermions come into families and different generations are not related by the gauge group.

Several authors have recently discussed the problem of flavor unification [4–7]. Because of the phenomenological success of SU(5) they usually require that the group SU(5) is always embedded into a larger gauge group G. In this paper we relax this condition, i.e., we do not require that the gauge group G, necessarily, breaks down to $G \supset \mathrm{SU}(5) \times G'$, instead we assume that G breaks down to $G \supset \mathrm{SU}(3)^{\mathrm{c}} \times G^{\mathrm{fl}}$. With this difference in mind we present our set of rules for building a unified theory with flavor unification. This set will lead us to SU(8) as a grand unification gauge group. We also give some general features of our SU(8) model.

First we formulate our set of rules (assumptions or constraints) for building a grand unified theory.

(I) The grand unification gauge group G should be simple.

(II) The admissible representations of G for the fermions should contain at most color singlets, color triplets and color antriplets.

(III) Each admissible irreducible representation of G should be used at most once to accomodate the fermions.

(IV) The representation of the left-handed fermions should be complex with respect to G and anomaly free.

(V) The number of superheavy fermions should be minimal.

(VI) The $\mathrm{SU}(3)^{\mathrm{c}}$ color gauge group must be asymptotically free.

As shown by Georgi and Glasgow [2], the idea of grand unification by a simple gauge group G is intimately connected with the asymptotic freedom of color SU(3). We take the assumptions (I) and (VI) as the basis of grand unification. The second assumption (II) is sufficiently general and reasonable as long as there is no experimental evidence or good theoretical reason against it. The consequences of the first two constraints have been discussed in a comprehensive paper by Gell-Mann, Ramond and Slansky [8].

The constraint (III), which has also been used by Georgi [4], eliminates many simple models in which a representation is repeated several times. Among the four possible classes for G^{fl} found in the study of the

☆ Work supported in part by the National Science Foundation.

[1] On leave from the Johns Hopkins University, Department of Physics, Baltimore, MD 21218, USA.

‡[1] In other classes only the fundamental representation of G satisfies the color restriction.

embedding $G \supset G^{fl} \times SU(3)^c$ in ref. [8], only the class $G^{fl} = G^{q+l} \times U(1)$ satisfies our third criterion [‡1]. Leptons and quarks are in different representations of G^{q+l} which transform the color singlet piece of the fundamental representation of G.

The grand unification gauge group G can be either $G = SU(n)$ or $G = SO(n)$. The known left-handed fermions seem to belong to a complex representation of $SU(2) \otimes U(1) \otimes SU(3)^c$. So the representation of all left-handed fermions should be complex with respect to G [2,4]. The anomaly condition follows from the renormalizability of the theory [9]. If $G = SU(n)$ only the completely antisymmetric representations $(n^k)_A$, $k = 1, ..., n-1$ of dimension $\binom{n}{k}$ satisfy the constraint (II) and except for $(n^{n/2})_A$, n even, these representations are all complex. If $G = SO(n)$ the color restriction is satisfied by the fundamental and spinor representations, and only for $n = 4m + 2$ are the two spinors complex and conjugate to one another [8]. There is a natural embedding of $SU(2m + 1)$ into the orthogonal group $SO(4m + 2)$. The 2^{2m} dimensional complex spinor representation transform under the $SU(2m + 1)$ group as $\Sigma_{k=0}^{m}(2m + 1)_A^k$.

So we can restrict our search to the unitary groups $G = SU(n)$. For our discussion it is sufficient to know that the anomaly of the representation $(n^k)_A$ is [10]

$$A(n, k) = \frac{(n - 2k)(n - 3)!}{(n - k - 1)!(k - 1)!} . \tag{1}$$

The total dimension of an admissible set of fermion representations satisfying the constraint (IV) increases rapidly with n. For example, for SU(9) the minimum number of quark flavors is $N_f = 21$, for SU(10) it is $N_f = 42$ and for Georgi's SU(11) it is $N_f = 65$. For the color SU(3) to be asymptotically free, at least $N_f - 16$ flavors must be made superheavy, i.e., with a mass above the unification mass scale.

Of course there is nothing wrong with this procedure, since after all, in general there must be superheavy bosons in grand unified theories. But within our present theoretical understanding, it seems rather artificial to introduce a very complicated structure around 10^{15} GeV to explain a seemingly very simple family pattern below 10^2 GeV. So we would like to impose our fifth constraint and even try, if possible, to avoid altogether any superheavy fermion.

Thus we are left with two groups $G = SU(7)$ and $G = SU(8)$ [‡2]. First we consider SU(7). We have only one set of fundamental representations satisfying the constraint (IV)

$$(L) \equiv \bar{7} \oplus 21 \oplus \bar{35} . \tag{2}$$

The flavor group is $G^{fl} = SU(4) \times U(1)$ and the $SU(7) \supset G^{fl} \times SU(3)^c$ decomposition of the representation (L) of the left-handed fermions is

$$\bar{7} = (\bar{4}, 1^c) \oplus (1, \bar{3}^c) , \tag{3a}$$

$$(7^2)_A = (6, 1^c) \oplus (4, 3^c) \oplus (1, \bar{3}^c) \equiv 21 , \tag{3b}$$

$$(\bar{7}^3)_A = (4, 1^c) \oplus (6, \bar{3}^c) \oplus (\bar{4}, 3^c) \oplus (1, 1^c) \equiv \bar{35} . \tag{3c}$$

If we assume the standard charge assignment, the model predicts eight flavors of quarks, four with $Q = +2/3$, four with $Q = -1/3$, four leptons with $Q = -1$ and four neutral leptons, one of which has no right-handed helicity component. However if we look at the possible $SU(3)^c \times SU(2)$ contents of (L) it can be easily realized that it is impossible to accomodate the τ lepton and its neutral partner ν_τ in the same SU(2) multiplet (τ as a SU(2) singlet is already ruled out by experiment). There also exists a potential difficulty with the b quark since it is not a member of a doublet.

In the case of $G = SU(8)$, again there is only one possible representation for left-handed fermions which is complex, anomaly-free and satisfies the constraint (III)

$$(L) = \bar{8} \oplus \bar{28} \oplus 56 . \tag{4}$$

The flavor group is $G^{fl} = SU(5) \times U(1)$ and the $SU(8) \supset SU(5) \times U(1) \times SU(3)^c$ decomposition of (L) is

$$\bar{8} = (\bar{5}, 1^c) \oplus (1, \bar{3}^c) , \tag{5a}$$

$$(\bar{8}^2)_A = (\bar{10}, 1^c) \oplus (\bar{5}, \bar{3}^c) \oplus (1, 3^c) \equiv \bar{28} , \tag{5b}$$

$$(8^3)_A = (\bar{10}, 1^c) \oplus (10, 3^c) \oplus (5, \bar{3}^c) \oplus (1, 1^c) \equiv 56 . \tag{5c}$$

With a standard charge assignment, this model predicts eleven flavors of quarks, five with $Q = 2/3$, six with $Q = -1/3$, six leptons with $Q = -1$ and ten neutral leptons, six of which have no right-handed helicity component. If we impose the condition that the SU(2)

[‡2] $G = SU(6)$ cannot satisfy the constraint (III).

decomposition of the **5** of SU(5) contain at most SU(2) singlets and doublets, then we get two possibilities for the SU(2) × SU(3)^c content of (L)

$$(\bar{L}) = 8(1, 1^c) \oplus 6(2, 1^c) \oplus 2(3, 1^c) \oplus 3(1, 3^c)$$
$$4(2, 3^c) \oplus 4(1, \bar{3}^c) \oplus 2(2, \bar{3}^c) \oplus (3, \bar{3}^c), \quad (6a)$$

$$(L) = 12(1, 1^c) \oplus 7(2, 1^c) \oplus 7(1, \bar{3}^c)$$
$$2(2, \bar{3}^c) \oplus 5(1, 3^c) \oplus 3(2, 3^c) \quad (6b)$$

Above the grand unification mass scale, the Weinberg angle is predicted to be [11] $\sin^2\theta_w = \frac{3}{4}$ for eq. (6a) and $\sin^2\theta_w = \frac{3}{8}$ for eq. (6b). Since the renormalized value (about fifty percent reduction independently on the number of flavors) is observed to be $\sin^2\theta_w \simeq 0.20$ we conclude that eq. (6b) is favored. To get the corresponding particle assignment of left-handed fermions we assume that there is a third generation (ν_τ, τ^-, t, b) with the same quantum numbers with respect to SU(2) × U(1) × SU(3)^c as the two generations already known (ν_e, e^-, u, d) and (ν_μ, μ^-, c, s). We drop the color index and give only the SU(5) content in the SU(8) ⊃ SU(5) × U(1) × SU(3)^c decomposition of (L)

$$\bar{\mathbf{8}}: (1, \bar{3}^c) \equiv (\bar{b}_3)_L; \quad (\bar{5}, 1^c) \equiv \begin{pmatrix} L_0^0 \\ L_i^- \\ \nu_\ell \\ \nu_m \\ \nu_n \end{pmatrix}_L,$$

$$\overline{\mathbf{28}}: (1, 3^c) \equiv (t_1)_L; \quad (\bar{5}, \bar{3}^c) \equiv \begin{pmatrix} \bar{b}_2 \\ \bar{t}_2 \\ \bar{d} \\ \bar{s} \\ \bar{b} \end{pmatrix}_L.$$

$$(\overline{10}, 1^c) \equiv \begin{pmatrix} 0 & L_j^- & \nu_e & \nu_\mu & \nu_\tau \\ -L_j^- & 0 & e^- & \mu^- & \tau^- \\ -\nu_e & -e^- & 0 & L_3^0 & -L_2^0 \\ -\nu_\mu & -\mu^- & -L_3^0 & 0 & L_1^0 \\ -\nu_\tau & -\tau^- & L_2^0 & -L_1^0 & 0 \end{pmatrix}_L,$$

$$\mathbf{56}: (1, 1^c) \equiv (L_k^-)_L: \quad (5, \bar{3}^c) \equiv \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{t}_1 \\ \bar{u} \\ \bar{c} \\ \bar{t} \end{pmatrix}_L.$$

$$(\overline{10}, 1^c) \equiv \begin{pmatrix} 0 & \bar{L}_0^0 & L_1^+ & L_2^+ & L_3^+ \\ -\bar{L}_0^0 & 0 & \bar{L}_1^0 & \bar{L}_2^0 & \bar{L}_3^0 \\ -L_1^+ & -\bar{L}_1^0 & 0 & \tau^+ & \hat{\mu}^+ \\ -L_2^+ & -\bar{L}_2^0 & -\tau^+ & 0 & e^+ \\ -L_3^+ & -\bar{L}_3^0 & \mu^+ & -e^+ & 0 \end{pmatrix}_L,$$

$$(10, 3^c) \equiv \begin{pmatrix} 0 & t_2 & u & c & t \\ -t_2 & 0 & d & s & b \\ -u & -d & 0 & b_k & -b_j \\ -c & -s & -b_k & 0 & b_i \\ -t & -b & b_j & -b_i & 0 \end{pmatrix}_L.$$

The notation is such that the first two components of the **5** or $\bar{\mathbf{5}}$ of SU(5) form a SU(2) doublet and the last three components are SU(2) singlets. b_i $(i = 1, 2, 3)$ are three new (heavy) quarks with $Q = -\frac{1}{3}$; t_1, t_2 are the two new heavy quarks with $Q = \frac{2}{3}$ (in addition to t); L_i^- $(i = 1, 2, 3)$ are three new charged heavy leptons and L_i^0 $(i = 0, 1, 2, 3)$ are four new massive neutral leptons. Finally ν_ℓ ν_m and ν_n are three new neutrinos [#3]. The above assignment is determined within some permutations (i, j, k) of (1, 2, 3). Permutations among the unknown neutral leptons and between t_1 and t_2 are also possible. But the assignment of the known fermions is completely determined. Namely, it is interesting to note that in our theory there are only three left-handed doublets for quarks and leptons and additional doublets are either V + A or a mixture of (V − A) and (V + A).

Our choice for the particle content is very suggestive of an horizontal SU(3)^h symmetry [12,13]. The breaking of SU(8) down to SU(3)^h × SU(2) × U(1) × SU(3)^c should be at superhigh energy to keep the

[#3] Cosmological arguments may not necessarily restrict the number of neutrinos to 3 or 4. See for example refs. [14,15].

successful prediction of Georgi and Glashow's SU(5) for the Weinberg angle [11]. Some obvious questions are the problem of getting such a symmetry breaking scheme via the Higgs mechanism together with successful relations among fermion masses.

Note added. After completion of this work, we became aware of a preprint by T.L. Curtright and P.G.O. Freund, entitled "SU(8) Unification and Supergravity" EFI 79/25 (unpublished). Their study of SU(8) from the standpoint of supergravity [16] is complementary to ours and leads to the same particle assignment in a chiral model.

We wish to thank M. Testa and T.N. Truong for helpful discussions. One of the authors (C.W.K.) would like to thank the Particle Physics Theory Group at Ecole Polytechnique for thier hospitality.

References

[1] J.C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. D8 (1973) 1240.
[2] H. Georgi and S.L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 438.
[3] H. Fritzsch and P. Minkowski, Phys. Lett. 49B (1974) 438.
[4] H. Georgi, Nucl. Phys. B156 (1979) 126.
[5] P.H. Frampton, Phys. Lett. 88B (1979) 299.
[6] P.H. Frampton and S. Nandi, Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 1460.
[7] P.H. Frampton, Phys. Lett. 89B (1980) 352.
[8] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, Rev. Mod. Phys. (1978) 721.
[9] D. Gross and R. Jackiw, Phys. Rev. D6 (1972) 477; C. Bouchiat, J. Iliopoulos and Ph. Meyer, Phys. Lett. 38B (1979) 519.
[10] J. Banks and H. Georgi, Phys. Rev. D14 (1976) 1159.
[11] H. Georgi, H. Quinn and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 451.
[12] F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. 42 (1979) 421.
[13] T. Yanagida, Phys. Rev. D11 (1979) 2986.
[14] A.D. Linde, Phys. Lett. 83B (1979) 311.
[15] G. Steigman, K.A. Olive and D.N. Schramm, Phys. Rev. Lett. 43 (1979) 239.
[16] E. Cremmer and B. Julia, Phys. Lett. 80B (1978) 48.

REFERENCES GENERALES

[1] C.N. Yang et R. Mills, Phys. Rev. 96 (1954),191.

[2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967), 1264.
A. Salam, in : Elementary Particle Theory, ed. N. Svartholm (Almquist and Forlag, Stockolm, 1968).

[3] P.W. Higgs, Phys. Rev. Lett. 12 (1964), 132.

[4] M. Gell-Mann, Phys. Lett. 8 (1963), 214.

[5] M. Gell-Mann, Acta Physica Austriaca, Suppl. IX (1972), 733.

[6] H. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30 (1973), 1346.
D. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 30 (1973), 1343.

[7] S. Weinberg, in : A Festschritt for I.I. Rabi, ed. L. Motz (New York Academy of Sciences, New York, 1977), 185.

[8] J. Gasser and H. Leutwyler, Phys. Rep. 87 (1982), 77.

[9] J. Goldstone, Nuovo Cimento 19 (1961), 154.

[10] S. Adler, Phys. Rev. 177 (1969), 2426.
J.S. Bell and R. Jackiw, Nuovo Cimento 51 (1969) 47.

[11] G. ^{t}Hooft, Phys. Rev. Lett. 37 (1976), 8.

[12] H. Georgi, H. Quinn and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 451.

[13] J.C. Pati and A. Salam, Phys. Rev. Lett. 31 (1973), 661.

[14] M. Yoshimura, Phys. Rev. Lett. 41 (1978) 381.

[15] H. Georgi and L. Glashow, Phys. Rev. Lett. 33 (1974), 451.

[16] H. Fritzch and P. Minkowski, Ann. of Phys. 93 (1975) 193.

[17] I. Antoniadis, C. Bouchiat and J. Iliopoulos, Phys. Lett. 97B (1980), 367.

[18] D.G. Sutherland, Phys. Lett. 23 (1966), 384.

[19] R.F. Dashen, Phys. Rev. 183 (1969), 1245.

[20] S. Raby, Phys. Rev. D13 (1976), 2594.

[21] T.N. Truong, Phys. Lett. 99B (1981), 154.

[22] E. Witten, Nucl. Phys. B156 (1979), 269.
G. Veneziano, Nucl. Phys. B159 (1979), 213.

[23] L.F. Li, Phys. Rev. D9 (1974), 1723.

[24] L. Michel, CERN preprint TH-2716 (1979).

[25] F. Bucella, H. Ruegg and C.A. Savoy, Nucl. Phys. B169 (1980), 68.

[26] K. Symanzik, Comm. Math. Phys. 34 (1973), 7.
T. Appelquist and J. Carrazone, Phys. Rev. D11 (1975), 2856.

[27] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B35 (1971) 167.

[28] A.J. Buras, J. Ellis, M.K. Gaillard and D.V. Nanopoulos, Nucl. Phys. B135 (1978), 66.
F.A. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett. 43 (1979), 157.

[29] C. Jarlskog and F. Yndurain, Nucl. Phys. B149 (1980), 29;
M.B. Gavela et al., Phys. Lett. 98B (1981), 51; Phys. Rev. D23 (1981), 1580;
A.M. Din, G. Girardi and P. Sorba, Phys. Lett. 91B (1980), 77.

[30] J.F. Donoghue , Phys. Lett. 72B (1977), 53;
E. Golowich, Phys. Rev. D22 (1980), 1148.

[31] Krishnaswauny et al.; Battistoni et al., (XXI Conférence de Physique des Hautes Energies, Paris, 1982).

[32] C. Kounnas, proceedings Rencontre de Moriond (1982)

[33] W.J. Marciano et A. Sirlin, Nucl. Phys. B189 (1981), 442.

[34] A.D. Dolgov, Ya. B. Zeldovich, Rev. Mod. Phys. (1981), 1

[35] Pour une revue, voir P. Fayet and S. Ferrara, Phys. Rep. 32 (1977), 249.

[36] J. Yang, et al., Astrophys. J. 227 (1979), 697.

[37] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, Rev. Mod. Phys. (1978), 721.

[38] R. Slansky, Phys. Rep. 79 (1981), 1.

[39] D. Gross and R. Jackiw, Phys. Rev. D26 (1972), 477;
C. Bouchiat, J. Iliopoulos and Ph. Meyer, Phys. Lett. 38B (1979), 519.

[40] J. Banks and H. Georgi, Phys. Rev. D14 (1976), 1159.

RESUME

La première partie de cette thèse est consacrée à l'étude des désintégrations des mésons η et η' en trois pions au moyen de l'algèbre des courants. L'interaction pion-pion dans l'état final produit un facteur d'amplification suffisant pour expliquer la largeur $\Gamma(\eta \to 3\pi)$.

La dernière partie présente une étude complète des effets de la brisure spontanée de symétrie dans une théorie grand-unifiée. Les résultats permettent en particulier de faire une prédiction précise pour le temps de vie du proton et la valeur de l'angle θ_W des interactions électromagnétiques et faibles dans le modèle SU(5).

Enfin un modèle de grande unification basé sur SU(8) est proposé pour incorporer les trois familles de fermions de façon naturelle.

MOTS CLES

Symétrie chirale, Mésons pseudoscalaires, Etat final (interaction). Grande unification, Renormalisation, Fermions.